49. Österreichische Mathematik-Olympiade

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene – Lösungen

5. April 2018

Aufgabe 1. (Gottfried Perz) *Es seien a und b nichtnegative reelle Zahlen mit $a+b<2$. Man beweise die folgende Ungleichung:*

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\le\frac{2}{1+ab}$$

Für welche a, b gilt Gleichheit?

Lösung 1. (Karl Czakler) Es gilt

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}=\frac{2+a^2+b^2}{(1+a^2)(1+b^2)}=1+\frac{1-a^2b^2}{(1+a^2)(1+b^2)}.$$

Mit Cauchy gilt $(1+a^2)(1+b^2)\ge(1+ab)^2$ und da mit der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2<1$ gilt, folgt

$$1+\frac{1-a^2b^2}{(1+a^2)(1+b^2)}\le1+\frac{1-a^2b^2}{(1+ab)^2}=\frac{2}{1+ab}$$

und alles ist gezeigt. Gleichheit gilt für $a=b$. $\square$

Lösung 2. (Gottfried Perz) Für die rechte Seite der zu beweisenden Ungleichung gilt

$$\frac{2}{1+ab}=\frac{(1+ab)+(1-ab)}{1+ab}=1+\frac{1-ab}{1+ab},$$

für die linke Seite erhalten wir

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}=\frac{2+a^2+b^2}{1+a^2+b^2+a^2b^2}=1+\frac{1-a^2b^2}{1+a^2+b^2+a^2b^2}.$$

Somit ist zu beweisen, dass

$$\frac{1-a^2b^2}{1+a^2+b^2+a^2b^2}\le\frac{1-ab}{1+ab}$$

beziehungsweise

$$\frac{(1+ab)(1-ab)}{1+a^2+b^2+a^2b^2}\le\frac{1-ab}{1+ab}$$

gilt. Wegen $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2<\left(\frac{2}{2}\right)^2=1$ (AM-GM-Ungleichung) erhalten wir $1-ab>0$, also kann die letzte Ungleichung durch Division durch $1-ab>0$ äquivalent umgeformt werden, und es bleibt zu zeigen, dass

$$\frac{1+ab}{1+a^2+b^2+a^2b^2}\le\frac{1}{1+ab}$$

Beide Nenner sind positiv, daher ist diese Ungleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned}(1+ab)^2 &\le 1+a^2+b^2+a^2b^2\\ 1+2ab+a^2b^2 &\le 1+a^2+b^2+a^2b^2\\ 0 &\le a^2-2ab+b^2\end{aligned}$$

Wegen $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ gilt die letzte Ungleichung für alle a,b mit Gleichheit genau für $a=b$. Die zu beweisenden Ungleichung gilt also für alle positiven a,b mit $a+b<2$. Gleichheit gilt genau für $0<a=b<1$. □

Lösung 3. (Gottfried Perz) Weil alle in der Ungleichung auftauchenden Nenner positiv sind, kann die Ungleichung durch Multiplikation mit $(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)$ äquivalent umgeformt werden; wir erhalten

$$\begin{aligned}\left((1+b^2)+(1+a^2)\right)(1+ab) &\le 2(1+a^2)(1+b^2)\\ 2+a^2+b^2+2ab+a^3b+ab^3 &\le 2+2a^2+2b^2+2a^2b^2\\ -a^2+2ab-b^2+a^3b-2a^2b^2+ab^3 &\le 0\\ ab(a-b)^2-(a-b)^2 &\le 0\\ (ab-1)(a-b)^2 &\le 0\end{aligned}$$

Diese letzte Ungleichung ist unter der Voraussetzung $a+b<2$ jedenfalls erfüllt, denn es gilt nach geometrisch-arithmetischer Mittelungleichung

$$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 < \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1,$$

also $ab-1<0$, sowie $(a-b)^2 \ge 0$ mit Gleichheit genau für $a=b$.
Daher ist auch die zur letzten Ungleichung äquivalente gegebene Ungleichung bewiesen; Gleichheit gilt genau für $0<a=b<1$. □

Lösung 4. (Walther Janous) Mit der AGMU erhalten wir $2>a+b\ge 2\sqrt{ab}$, also $ab<1$.
Wir setzen $p=ab$ und betrachten die Ungleichung für alle $a,b\ge 0$ mit $ab=p$.
Für $p=0$, also etwa $b=0$, lautet die Ungleichung $\frac{1}{1+a^2}+1\le 2$, d. h. $\frac{1}{1+a^2}\le 1$. Dies ist aber evident.
Es sei im Weiteren $0<p<1$. Wegen $b=\frac{p}{a}$ haben wir für die Ungleichung

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{a^2}{p^2+a^2}\le\frac{2}{1+p},\quad \text{d. h.}$$

$$\frac{a^4+2a^2+p^2}{a^4+(p^2+1)a^2+p^2}\le\frac{2}{1+p}$$

zu zeigen. Wir subtrahieren auf beiden Seiten 1 und erhalten

$$\frac{(1-p^2)a^2}{a^4+(p^2+1)a^2+p^2}\le\frac{1-p}{1+p},$$

d. h. wegen $1-p>0$

$$\frac{(1+p)a^2}{a^4+(p^2+1)a^2+p^2}\le\frac{1}{1+p},\quad \text{also}$$

$$a^2(p^2+2p+1)\le a^4+(p^2+1)a^2+p^2,\quad \text{d. h.}$$

$$a^4-2pa^2+p^2\ge 0,$$

was wegen $(a^2-p)^2\ge 0$ klar ist.
Außerdem ergibt sich Gleichheit genau dann, wenn $a=\sqrt{p}$ und damit auch $b=\sqrt{p}$, d. h. $a=b$ gilt. □

Lösung 5. (Walther Janous) Wie im vorherigen Beweis betrachten wir die Ungleichung für $a, b \geq 0$ mit $ab = p$, wobei wir nur noch $0 < p < 1$ überlegen.
Wir ersetzen a und b durch $\sqrt{x}$ bzw. $\sqrt{y}$. Damit gilt $xy = p^2$, also $y = \frac{p^2}{x}$.
Mit $f(x) := \frac{1}{1+x} + \frac{x}{p^2+x}$ lautet die Ungleichung

$$f(x) \leq \frac{2}{1+p},\ x \geq 0.$$

Wir geben nun zwei Beweise dieser Ungleichung an.
Beweis ohne Differentialrechnung.
Wir bemerken, dass $f\left(\frac{p^2}{x}\right) = f(x)$ ist, und zeigen die Ungleichung $f(s) < f(t) \leq f(p)$ für $0 \leq s < t \leq p$.
Denn, dann gelten $st < p^2$ und

$$f(s) < f(t) \iff \frac{1}{1+s} - \frac{1}{1+t} < \frac{t}{p^2+t} - \frac{s}{p^2+s} \iff$$
$$\frac{t-s}{(1+s)(1+t)} < \frac{p^2(t-s)}{(p^2+s)(p^2+t)} \iff \frac{1}{(1+s)(1+t)} < \frac{p^2}{(p^2+s)(p^2+t)} \iff$$
$$p^4 + p^2(s+t) + st < p^2 + p^2(s+t) + p^2 st \iff st(1-p^2) < p^2(1-p^2) \iff st < p^2$$

Wegen $p \leq u < v \Longrightarrow 0 < \frac{p^2}{v} < \frac{p^2}{u} \leq p$ haben wir $f\left(\frac{p^2}{v}\right) < f\left(\frac{p^2}{u}\right) \leq f(p)$, d.h. $f(v) < f(u) \leq f(p)$.
Deshalb hat $f(x)$ bei $x = p$ das globale Maximum $f(p)$. Mit $f(p) = \frac{2}{1+p}$ ergibt sich die Ungleichung. $\square$

Lösung 5a. (Walther Janous) Beweis mit Differentialrechnung.
Wir haben $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{p^2}{(p^2+x)^2} = \frac{p^2(1+x)^2-(p^2+x)^2}{(1+x)^2(p^2+x)^2}$.
Der Zähler lässt sich als das Produkt $(p(1+x) - p^2 - x)(p(1+x) + p^2 + x)$ darstellen, dessen zweiter Faktor positiv ist.
Mit Hilfe des ersten Faktors $p+px-p^2-x = p(1-p)+x(p-1) = (1-p)(p-x)$ folgt $f'(x) = 0 \iff x = p$ und wegen des Faktors $p - x$, dass man dabei das globale Maximum erhält. $\square$

Lösung 6. (Walther Janous) Die angegebene Ungleichung trifft für $a = b$ immer zu - es ergibt sich Gleichheit.
Es gelte deshalb im Weiteren o. B. d. A. $a < b$.
Wir beweisen, dass

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} < \frac{2}{1+ab}$$

gilt.
Für $a = 0$ erhalten wir $\frac{1}{1+b^2} < 1$, was wegen $b > 0$ simmt.
Für $a > 0$ haben wir $a^2 < ab < b^2$ und wir zeigen

$$\frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{1+ab} < \frac{1}{1+ab} - \frac{1}{1+b^2}, \text{ das heißt}$$
$$\frac{ab-a^2}{(1+a^2)(1+ab)} < \frac{b^2-ab}{(1+ab)(1+b^2)} \iff \frac{a(b-a)}{1+a^2} < \frac{b(b-a)}{1+b^2} \iff$$
$$a + ab^2 < b + a^2 b \iff ab(b-a) < b - a \iff ab < 1$$

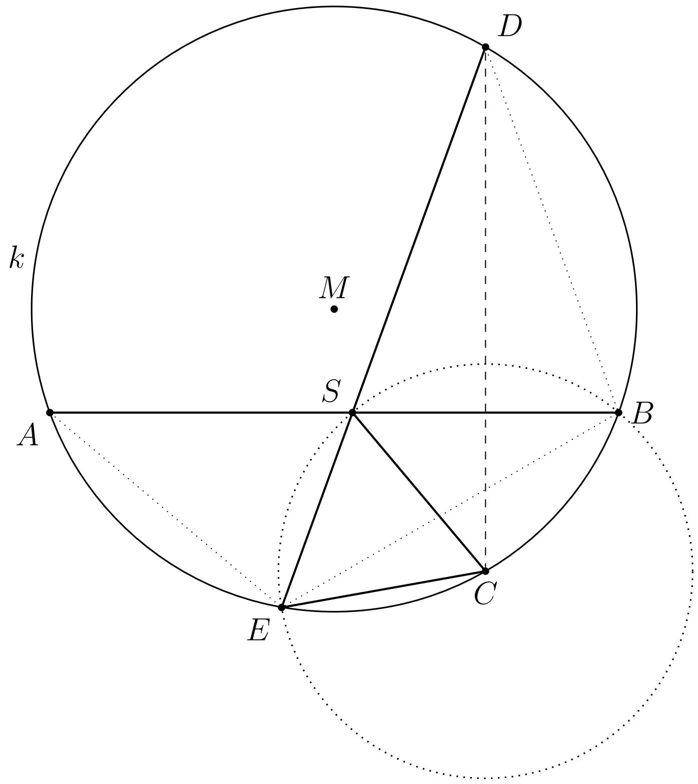
Dies ergibt sich aber wegen $ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 < \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$. $\square$

Aufgabe 2. (Stefan Leopoldseder) *Es seien k ein Kreis mit Radius r und AB eine Sehne von k mit $\overline{AB} > r$. Weiters sei S jener Punkt auf der Sehne AB, für den $\overline{AS} = r$ gilt. Die Streckensymmetrale von BS schneide den Kreis k in den Punkten C und D. Die Gerade durch die Punkte D und S schneide k in einem weiteren Punkt E.*
Man beweise, dass das Dreieck CSE gleichseitig ist.

Lösung 1. (Stefan Leopoldseder) Wir zeigen im ersten Schritt $\overline{CS} = \overline{CE}$ (also die Gleichschenkeligkeit von CSE) und im zweiten Schritt $\sphericalangle SCE = 60°$.
Da C und D auf der Streckensymmetrale von BS liegen, ist $CBDS$ ein Deltoid mit

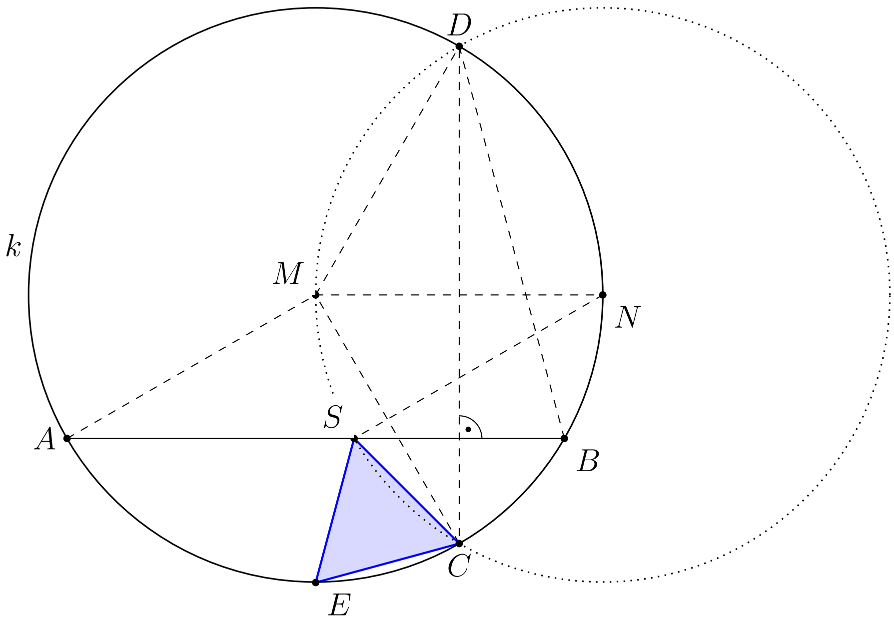
$$\overline{CS} = \overline{CB} \qquad \text{und} \qquad \sphericalangle CDB = \sphericalangle SDC = \sphericalangle EDC.$$

Die Strecken CB und CE sind also gleich lang (gleich große Peripheriewinkel zu D bzw. Südpolsatz im Dreieck EBD). Also ist $\overline{CS} = \overline{CB} = \overline{CE}$ gezeigt, damit existiert aber auch ein Kreis k_1 mit Mitte C, welcher E, S und B enthält.



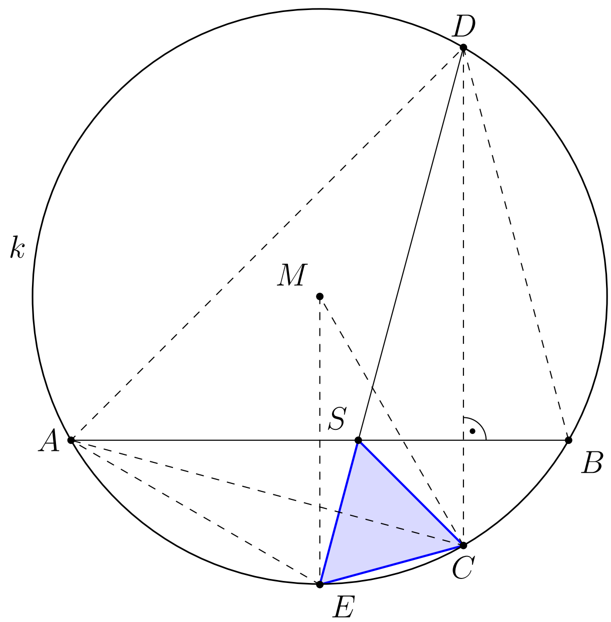
Das Dreieck ESA ist gleichschenkelig mit Basis ES, da es ähnlich zum (laut Angabe) gleichschenkeligen Dreieck BSD mit Basis BS ist ($\sphericalangle SEA = \sphericalangle DEA = \sphericalangle DBA = \sphericalangle DBS$ bzw. $\sphericalangle EAS = \sphericalangle EAB = \sphericalangle EDB = \sphericalangle SDB$, jeweils laut Peripheriewinkelsatz in k). Damit gilt $\overline{AE} = \overline{AS} = r$ (letzte Gleichheit laut Angabe), also ist die Sehnenlänge AE gleich dem Kreisradius r von k. Der zu AE gehörende Zentriwinkel beträgt demnach $60°$, der Peripheriewinkel $\sphericalangle ABE$ also $60/2 = 30°$. Nun ist aber $\sphericalangle SBE = \sphericalangle ABE = 30°$ ein Peripheriewinkel in k_1 zur Sehne SE, daher beträgt der Zentriwinkel $\sphericalangle SCE = 2 \cdot 30 = 60°$. □

Lösung 2. (Karl Czakler) Wir zeigen, dass alle Winkel des Dreiecks CES gleich $60°$ sind.
Es sei M die Mitte von k. Wir bilden das Parallelogramm $ASNM$. Wegen $\overline{AS} = \overline{MN} = r$ liegt N auf k. Da auch $\overline{AM} = r$ gilt, ist das Viereck $ASMN$ sogar ein Rhombus. Daher liegen die Punkte S und M auf einem Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt N und dem Radius r. Wegen $\overline{BM} = \overline{SN} = r$ ist die Streckensymmetrale von MN gleich der Streckensymmetralen von SB. Die Schnittpunkte der beiden Kreise k und k_1 sind daher die Punkte C und D. Die Dreiecke DMN und CMN sind daher gleichseitig und es folgt $\sphericalangle CMD = 2 \cdot 60° = 120°$.



Mit dem Peripheriewinkelsatz folgt nun $\sphericalangle CMD = \sphericalangle CSD = 120°$ und daher gilt $\sphericalangle CSE = 60°$. Weiters folgt mit dem Peripheriewinkelsatz $\sphericalangle CES = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle CMD = 60°$. Damit ist aber gezeigt, dass das Dreieck CES gleichseitig ist. $\square$

Lösung 3. (Karl Czakler) Wir verwenden für den Beweis folgenden bekannten Satz: Spiegelt man den Höhenschnittpunkt eines spitzwinkligen Dreiecks an den Seiten, so liegen die Spiegelpunkte auf dem Umkreis.



Da die Gerade AB normal auf DC steht, B am Umkreis k des Dreiecks ACD liegt und S der zu B symmetrische Punkt bezüglich der Seite DC ist, folgt, dass S der Höhenschnittpunkt des Dreicks ACD ist. Daher liegt der Punkt E symmetrisch zu S bezüglich der Seite AC und daher gilt $\overline{CS} = \overline{CE}$ und $\overline{AS} = \overline{AE} = r$. Die beiden gleichschenkeligen Dreiecke AES und EMC sind kongruent, da sie dieselbe Schenkellänge r haben und mit dem Peripheriewinkelsatz $\sphericalangle EMC = 2 \cdot \sphericalangle CAE = \sphericalangle EAS$ gilt. Daher gilt auch $\overline{ES} = \overline{CE}$ und somit sind alle drei Seiten des Dreiecks CES gleich lang. $\square$

Aufgabe 3. (Walther Janous) *Man bestimme für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ die Anzahl a_n der dreielementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$, in denen ein Element das arithmetische Mittel der beiden anderen Elemente ist.*

Lösung 1. (Walther Janous) Es ist klar: Wenn die drei Elemente der Größe nach geordnet sind, müssen die zwei Differenzen benachbarter Elemente gleich sein.
Damit liegt folgende Zählstrategie auf der Hand - Klassifikation nach der Größe der Differenzen.
Die Differenz 1 ergibt die Mengen $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$, …, $\{n-2,n-1,n\}$, das sind $n-2$ Mengen.
Bei Differenz 2 erhält man in analoger Weise $n-4$ Mengen.
Nun unterscheiden wir die zwei Fälle, ob n gerade oder ungerade ist.

- n ist gerade, also $n = 2k$. Die größtmögliche Differenz ist dann $k-1$ mit den zwei möglichen Mengen $\{1,k,2k-1\}$ bzw. $\{2,k+1,2k\}$. Deshalb beträgt die Gesamtzahl der gesuchten Mengen $a_{2k} = 2+4+\ldots+(2k-2) = k(k-1)$.

- n ist ungerade, also $n = 2k+1$. Dann ist die größtmögliche Differenz k mit der zugehörigen Menge $\{1,k+1,2k+1\}$. Deshalb beträgt die Gesamtzahl der gesuchten Mengen $a_{2k+1} = 1+3+\ldots+(2k-1) = k^2$

Zusammengefasst haben wir erhalten, dass $a_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ ist. □

Lösung 2. (Gerhard Kirchner) Offensichtlich ist $a_3 = 1$. Nun sei $n \geq 4$. Der Unterschied zwischen a_n und a_{n-1} besteht genau in den Mengen $\{a,b,c\}$ mit $a<b<c$, die das Element $c = n$ enthalten. Wegen $b = \frac{a+c}{2}$ ist b genau dann ganzzahlig, wenn $a \equiv c \bmod 2$. In der Menge $\{1,2,\ldots,n-1\}$ gibt es genau $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ Elemente derselben Parität wie n. Also erhalten wir

$$\begin{aligned}
a_n = a_{n-1} + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor &= \ldots = a_3 + \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = \\
&= \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \ldots + \frac{n-2}{2} + \frac{n-1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right).
\end{aligned}$$

Dabei wurde in der dritten Zeile zuerst die Summe ohne Abrunden berechnet und dann so oft $\frac{1}{2}$ abgezogen, wie Abrundungen nötig gewesen wären. □

Bemerkung. Man überlegt leicht, dass dies mit dem Ergebnis der ersten Lösung übereinstimmt.

Aufgabe 4. (Richard Henner) *Für eine natürliche Zahl $n \geq 2$ sei $d(n)$ die Anzahl der positiven Teiler von n.*
Man bestimme alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$, für die

$$d(n-1) + d(n) + d(n+1) \leq 8$$

gilt.

Lösung 1. (Richard Henner)
Wegen $n \geq 3$ sind alle vorkommenden Zahlen ≥ 2 und es gilt $d(k) \geq 2$ für $k \geq 2$. $d(k) = 2$ gilt, wenn k eine Primzahl ist. $d(k) = 3$ gilt, wenn k das Quadrat einer Primzahl ist. $d(k) = 4$ gilt, wenn k dritte Potenz einer Primzahl oder das Produkt zweier Primzahlen ist. Wegen $d(n-1)+d(n)+d(n+1) \leq 8$ kann $d(k) > 4$ nicht vorkommen.
Für $n = 3$ gilt $d(n-1)+d(n)+d(n+1) = 2+2+3 = 7$.
Für $n = 4$ gilt $d(n-1)+d(n)+d(n+1) = 2+3+2 = 7$.
Für $n = 5$ gilt $d(n-1)+d(n)+d(n+1) = 3+2+4 = 9$, ist zu groß.
Für $n = 6$ gilt $d(n-1)+d(n)+d(n+1) = 2+4+2 = 8$.
Für $n = 8$ gilt $d(n-1)+d(n)+d(n+1) = 2+4+4 = 10$, ist zu groß.
Für $n = 9$ gilt $d(n-1)+d(n)+d(n+1) = 4+3+4 = 11$, ist zu groß.
Behauptung: Für $n > 9$ ist $d(n-1)+d(n)+d(n+1) > 8$ und daher zu groß.
Beweis: Offensichtlich ist $d(n-1)+d(n)+d(n+1) \geq 6$.

$d(n-1)+d(n)+d(n+1)=6$ kann nicht vorkommen, weil drei aufeinanderfolgende Zahlen nicht alle Primzahlen sein können.
$d(n-1)+d(n)+d(n+1)=7$ bedeutet, dass zwei der drei Zahlen Primzahlen sein müssen und die dritte das Quadrat einer Primzahl. Das gilt für $n=3$ und $n=4$ (siehe oben). Für $n>4$ müssten $n-1$ und $n+1$ Primzahlen sein und n das Quadrat einer ungeraden Primzahl. Das geht aber nicht, weil nicht drei ungerade Zahlen aufeinanderfolgen können.
$d(n-1)+d(n)+d(n+1)=8$ bedeutet, dass entweder (a) zwei der drei Zahlen Primzahlen sein müssen und die dritte das Produkt von zwei Primzahlen oder dritte Potenz einer Primzahl oder (b) zwei der drei Zahlen das Quadrat einer Primzahl und die dritte eine Primzahl. Im Fall (a) müssen $n-1$ und $n+1$ Primzahlen sein und n daher eine gerade Zahl. Da $n-1$ und $n+1$ nicht durch 3 teilbar sind, muss n gerade und durch 3 teilbar sein. Da kommt nur $n=6$ infrage, das, wie oben angeführt, eine Lösung ist. Im Fall (b) müsste jedenfalls eine der drei aufeinanderfolgen Zahlen gerade sein und gleichzeitig Primzahl oder Quadrat einer Primzahl, was naürlch für $n>9$ nicht möglich ist.
Damit ist die Behauptung bewiesen und $n=3$, $n=4$ und $n=6$ sind die einzigen Lösungen. □

Lösung 2. (Gerhard Kirchner) Für eine gerade Zahl $k \geq 6$ gilt $d(k) \geq 4$, da 1, 2, $\frac{k}{2}$, k vier verschiedene Teiler sind. $n=3$ ist eine Lösung, $n=5$ hingegen nicht. Für ungerade $n \geq 7$ gilt

$$d(n-1)+d(n)+d(n+1) \geq 4+d(n)+4>8.$$

Ab nun sei n gerade. Für eine durch 3 teilbare Zahl $k \geq 6$ gilt $d(k) \geq 3$, da 1, 3, k drei verschiedene Teiler sind. Wir probieren die geraden Zahlen bis 6 aus und finden die Lösungen $n=4$ und $n=6$. Wenn $n \geq 8$ und $n-1$ durch 3 teilbar ist, gilt

$$d(n-1)+d(n)+d(n+1) \geq 3+4+d(n+1)>8.$$

Analog für $n \geq 8$ und $n+1$ ist durch 3 teilbar:

$$d(n-1)+d(n)+d(n+1) \geq d(n-1)+4+3>8.$$

Da von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen $n-1$, n, $n+1$ eine durch 3 teilbar sein muss, bleibt also nur mehr der Fall: n ist durch 6 teilbar. Für $n \geq 12$ sind dann 1, 2, 3, $\frac{n}{3}$, $\frac{n}{2}$, n sechs verschiedene Teiler von n, das heißt $d(n) \geq 6$. Daher gilt

$$d(n-1)+d(n)+d(n+1) \geq d(n-1)+6+d(n+1)>8.$$

Also gibt es keine weiteren Lösungen. □