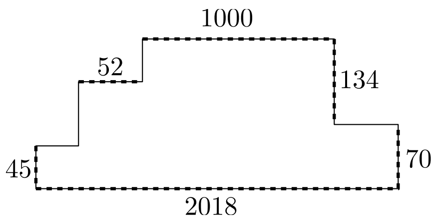
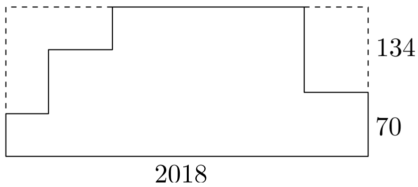
Aufgabe 1. Die Abbildung zeigt ein Zehneck, bei dem alle benachbarten Seiten senkrecht aufeinander stehen. Die strichliert dargestellten Seitenlängen sind bekannt und in Zentimetern angegeben.



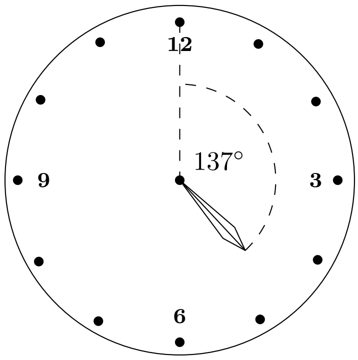
Ermittle den Umfang des Zehnecks in cm!

Ergebnis: 4444

Lösungsweg: Das Zehneck kann ganz einfach in ein Rechteck mit gleichem Umfang verwandelt werden, indem die nach innen gerichteten Ecken nach außen gekippt werden. Das Rechteck hat die Abmessungen 2018 und $70 + 134 = 204$. Somit beträgt der Umfang $2 \cdot (2018 + 204) = 4444$ in Zentimetern.



Aufgabe 2. Auf einer kaputten Uhr fehlt der Minutenzeiger. Wie viele Minuten sind seit der letzten vollen Stunde vergangen, wenn der Winkel zwischen 12 Uhr und dem Stundenzeiger 137° beträgt?



Ergebnis: 34

Lösungsweg: Da der Stundenzeiger in einer Stunde $360° : 12 = 30°$ überstreicht, dauert es zwei Minuten bis 1° überstrichen wird. Weil der Stundenzeiger $137° - 4 \cdot 30° = 17°$ nach 4 Uhr überstrichen hat, sind seither $17 \cdot 2 = 34$ Minuten vergangen.

Aufgabe 3. Vier Studenten, Georg, Wolfgang, Hubert und Andreas, nahmen an einer Prüfung teil. Wir wissen, dass sie in unbekannter Reihenfolge 2, 12, 86 und 6 Punkte erreicht haben. Außerdem wissen wir noch Folgendes:

- Georg hat *pampam* Punkte als Hubert,
- Hubert hat *pampam* Punkte als Wolfgang,
- Andreas hat *pampam* Punkte als Wolfgang,
- Georg hat *pampam* Punkte als Andreas,

wobei *pampam* entweder die Bedeutung „mehr“ oder „weniger“ hat, und zwar in allen vier Fällen dieselbe. Ermittle die Summe der Punkte von Hubert und Andreas!

Ergebnis: 18

Lösungsweg: Im Fall, dass *pampam* „mehr“ bedeutet, hat Georg die meisten Punkte erreicht und Wolfgang die wenigsten. Falls *pampam* „weniger“ bedeutet, ist dies genau umgekehrt. In jedem Fall haben Hubert und Andreas die Punkte 6 und 12 erreicht. Somit ergibt sich für die Summe 18.

Aufgabe 4. Laura und Marie stehen auf einem Marktplatz und zählen im Uhrzeigersinn alle rundherum angrenzenden Häuser. Als Startpunkt hat sich jede ein anderes Haus gewählt, so dass Lauras Haus Nummer 4 dasselbe ist wie Maries Haus Nummer 16 und Lauras Nummer 12 dasselbe ist wie Maries Nummer 7. Wie viele Häuser grenzen an den Marktplatz?

Ergebnis: 17

Lösungsweg: Da Lauras Haus Nummer 4 dasselbe ist wie Maries Haus Nummer 16, gibt es bei der Zählung der Häuser einen Abschnitt, in dem Maries Nummern um 12 größer sind als Lauras Nummern. Allerdings muss dieser Abschnitt an Häusern enden, bevor Laura ihr zwölftes Haus erreicht, weil dieses Haus ja sonst in Maries Zählung die Nummer $12 + 12 = 24$ hätte. Der Unterschied zwischen dieser Zahl 24 und der tatsächlich von Marie gezählten Nummer 7 gibt die Anzahl der Häuser an. Also grenzen $24 - 7 = 17$ Häuser an den Marktplatz an.

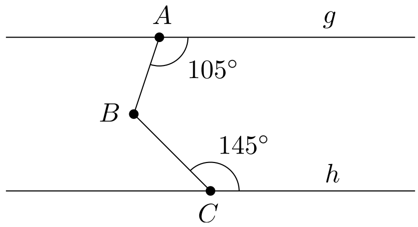
Aufgabe 5. Doris will die Kaffeemaschine entkalken. In der Anleitung steht, dass sie dafür eine Mischung aus vier Teilen Wasser mit einem Teil 10%iger Essigessenz verwenden soll. Sie hat aber nur eine 40%ige Essigessenz zur Hand. Wie viele Teile Wasser muss sie mit einem Teil dieser Essigessenz mischen, damit sie das gleiche Mischverhältnis erhält?

Hinweis: Eine n%ige Essigessenz besteht zu n Teilen aus Essig und zu $100 - n$ Teilen aus Wasser.

Ergebnis: 19

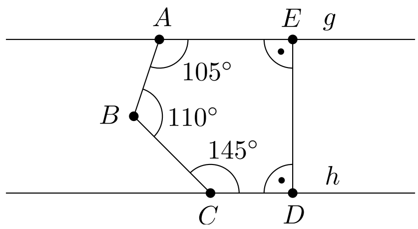
Lösungsweg: Im Mischverhältnis der Anleitung macht der Essig 10% von einem der fünf Teile aus. Die selbe Konzentration erhält man, wenn $40\% = 4 \cdot 10\%$ von einem von $4 \cdot 5 = 20$ Teilen aus Essig besteht. Folglich muss Doris einen Teil der 40%igen Essigessenz mit 19 Teilen Wasser mischen.

Aufgabe 6. Wenn g parallel zu h ist und die Winkel bei A bzw. C wie im Bild 105° bzw. 145° sind, wie groß ist dann der Winkel $\angle CBA$?

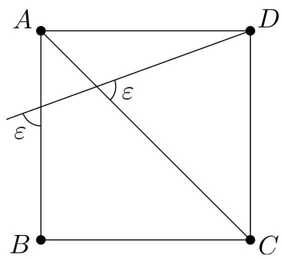


Ergebnis: 110°

Lösungsweg: Es gibt mehrere Wege einzusehen, dass sich die Winkel bei A, B und C zu 360° aufsummieren. Beispielsweise erhält man wie in der Skizze durch das Einzeichnen eines Lotes auf die parallelen Geraden die beiden Punkte D und E, die mit den gegebenen Punkten ein Fünfeck $ABCDE$ bilden. Da die Innenwinkelsumme in einem Fünfeck immer 540° beträgt, berechnet sich der gesuchte Winkel zu $\angle CBA = 540° - 180° - 105° - 145° = 110°$.



Aufgabe 7. Falls $ABCD$ ein Quadrat ist, wie groß ist dann der Winkel ε (in Grad)?



Ergebnis: 67,5°

Lösungsweg: Seien X auf AB und Y auf AC die zwei Scheitel der Winkel ε. Dann gilt $\angle YXA = \angle AYX = \varepsilon$. Wegen $\angle XAY = \angle BAC = 45°$ ergibt sich für die Innenwinkel des Dreiecks XYA die Gleichung

$$45° + \varepsilon + \varepsilon = 180°$$

und somit ist $\varepsilon = 67{,}5°$.

Aufgabe 8. Manuel wurde an dem Tag geboren, an dem seine Mutter 27 Jahre alt geworden ist. Wie oft kann es höchstens vorkommen, dass Manuels Alter genauso groß ist wie das rückwärts gelesene Alter seiner Mutter?

Hinweis: Mögliche führende Nullen von Zahlen werden ignoriert, z.B. 470 ist rückwärts gelesen 74.

Ergebnis: 7

Lösungsweg: Seien Manuel c Jahre und seine Mutter m Jahre alt, wobei c gleich ist wie m rückwärts gelesen. Die Zahlen c und m haben die gleiche Anzahl von Stellen, die mindestens zwei beträgt. Dabei hat c möglicherweise eine führende Null, wenn m mit einer Null endet. Seien a und b jeweils die Einerstelle von c bzw. m. Da Manuels Mutter 27 Jahre älter ist, ist entweder $a + 7 = b$ oder $a + 7 = 10 + b$. Wenn die Mutter mindestens 100 Jahre alt wäre, könnte die Differenz der ersten Ziffern ihres jeweiligen Alters höchstens 1 betragen, was jedoch nicht möglich ist, da dies genau die Ziffern b und a sind. Somit haben beide Zahlen c und m jeweils zwei Stellen.

Daher sind alle Zahlen $\overline{ab}$ gesucht, so dass

$$\overline{ab} = \overline{ba} + 27.$$

Wegen $a > b$ kann die Bedingung $a + 7 = b$ nicht erfüllt sein. Vielmehr muss $a + 7 = 10 + b$ gelten, also $a = b + 3$. Aus $a \leq 9$ folgt $b \leq 6$. Für jede Ziffer $b \in \{0, 1, \ldots, 6\}$ erhält man a als $a = b + 3$. Es ist nun einfach zu erkennen, dass für diese Ziffern die Gleichung $\overline{(b+3)b} = \overline{b(b+3)} + 27$ gilt. Die gewünschte Situation kann somit 7-mal vorkommen, und zwar wenn Manuel 3, 14, 25, 36, 47, 58 und 69 Jahre alt ist.

Aufgabe 9. Leonie will aus 32 weißen und 32 schwarzen Würfeln mit Seitenlänge 1 einen großen Würfel der Dimension $4 \times 4 \times 4$ zusammenbauen. Dabei versucht sie den Würfel so zu bauen, dass ein möglichst großer Anteil der Oberfläche des großen Würfels weiß ist. Wie groß kann dieser weiße Anteil maximal sein?

Ergebnis: 3/4

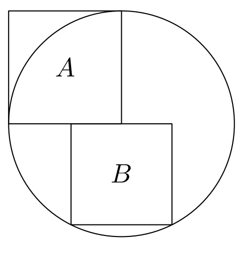
Lösungsweg: Setzt man einen Einheitswürfel in eine der Ecken des großen Würfels, so sind drei seiner Seiten sichtbar, an einer Kante sind entsprechend zwei seiner Seiten sichtbar, an den restlichen Positionen der Seitenflächen nur eine Seite und ansonsten keine. Im $4 \times 4 \times 4$-Würfel gibt es acht Ecken und an jeder der zwölf Kanten zwei Plätze für Einheitswürfel, sodass an den Ecken und Kanten insgesamt 32 Einheitswürfel positioniert werden können. Es ist klar, dass der größt mögliche weiße Anteil dadurch erreicht werden kann, dass genau diese Positionen mit kleinen weißen Einheitswürfeln besetzt werden. In diesem Fall sehen alle Seitenflächen des großen Würfels gleich aus – auf einer Seitenfläche sind zwölf weiße und vier schwarze Einheitsquadrate sichtbar. Deshalb ist der gesuchte maximale weiße Anteil $12/16 = 3/4$.

Aufgabe 10. Einhundert Personen nahmen an der Auswahl der Besatzung für einen Flug zum Merkur teil. Jeder potentielle Astronaut wurde drei Tests unterzogen, bei denen bestimmte gesundheitliche, psychologische und die Erfahrung betreffende Kriterien überprüft wurden. Nur 26 Personen bestanden den Gesundheitstest erfolgreich. Darüber hinaus versagten 60 Teilnehmer in mehr als einem der drei Tests. Schließlich gab es 83 Personen, die entweder den psychologischen Test oder den Erfahrungstest nicht bestanden hatten, aber niemand scheiterte gleichzeitig an diesen beiden Tests. Wie viele Teilnehmer bestanden alle drei Tests und wurden somit für die Mission ausgewählt?

Ergebnis: 3

Lösungsweg: Da niemand sowohl im Psychologie- als auch im Erfahrungstest durchgefallen ist, müssen alle Teilnehmer, die bei mindestens zwei Tests versagt haben, wegen ihrer Gesundheit versagt haben. Das ergibt $(100 - 26) - 60 = 14$ Personen, die nur den Gesundheitstest nicht bestanden. Zusammen mit 83 Personen, die den Psychologie- oder Erfahrungstest nicht bestanden, wurden 97 Teilnehmer entlassen. Daher wurden aus der ganzen Gruppe nur 3 Astronauten ausgewählt.

Aufgabe 11. Das Quadrat A besitzt zwei Seiten, die mit Radien eines Kreises zusammenfallen. Ferner liegen zwei Ecken des Quadrats B auf dem gleichen Kreis und eine Seite von B liegt teilweise auf einer Seite von A, wie in der Abbildung zu sehen ist. Bestimme das Verhältnis des Flächeninhalts des Quadrats A zum Flächeninhalt des Quadrats B.

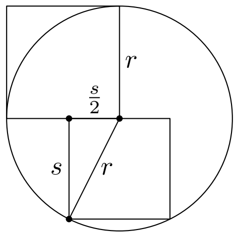


Ergebnis: $5 : 4$

Lösungsweg: Die Seitenlänge des Quadrats B wird mit s bezeichnet. Aus Symmetriegründen teilt der Mittelpunkt des Kreises die Seite des Quadrats B, welche auf dem Durchmesser des Kreises liegt, in zwei gleiche Teile der Länge $s/2$. Der Satz von Pythagoras ergibt

$$r^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + s^2 = \frac{5}{4}s^2$$

und deshalb ist das gesuchte Verhältnis $5 : 4$.



Aufgabe 12. Bestimme die letzten beiden Ziffern des Produkts

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37.$$

Ergebnis: 10

Lösungsweg: Da das Produkt $2 \cdot 5$ enthält, ist die Einerstelle 0. Man erhält die Zehnerstelle als letzte Ziffer des Produkts $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 37$. Es genügt, nur die Einerstellen der Faktoren zu betrachten. Darüber hinaus kann man die Einser ignorieren. Also muss man die letzte Ziffer des folgenden Produkts bestimmen:

$$3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 7 = 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9$$

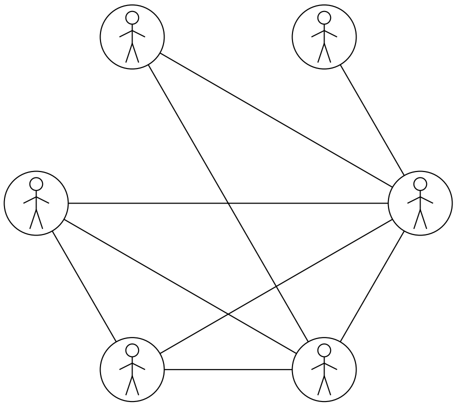
Da $3 \cdot 7 = 21$ die Einerstelle 1 hat, kann man Paare von 3 und 7 entfernen. Danach ist nur mehr das Produkt $9 \cdot 9$ übrig, dessen Einerstelle wieder 1 ist. Daher sind die letzten beiden Ziffern des angegebenen Produkts 10.

Aufgabe 13. Ein Kriminalbeamter verhörte zunächst fünf von sechs Verdächtigen einer Straftat. Dabei fand er heraus, dass diese aus dem Kreis aller Verdächtigen jeweils 1, 2, 3, 4 bzw. 5 Freunde haben. Er weiß, dass Freundschaft symmetrisch ist und beschloss daher, vor dem Verhör des letzten Verdächtigen die Anzahl seiner Freunde herauszufinden. Wie viele waren es?

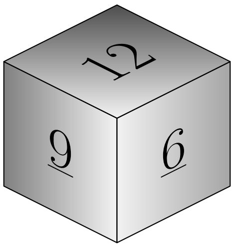
Ergebnis: 3

Lösungsweg: Sei n die Anzahl der Freunde des letzten Verdächtigen. Der Verdächtige mit fünf Freunden ist mit allen anderen befreundet. Wenn man ihn aus der Gruppe ausschließt, verringert das die Anzahl der Freunde von jedem anderen jeweils um eins. Dann kann man auch den Verdächtigen mit nur einem Freund ausschließen, da die Anzahl seiner Freunde auf null gesunken ist und er daher nicht mehr von Bedeutung ist. Auf diese Weise erhält man eine Gruppe von vier Verdächtigen, von denen man weiß, dass sie jeweils 1, 2, 3 bzw. $n-1$ Freunde haben. Durch das Wiederholen der beiden Schritte erzeugt man eine noch kleinere Gruppe von zwei Verdächtigen mit 1 und $n-2$ Freunden. Es ist nun klar, dass $n-2=1$ gelten muss, also $n=3$.

Hinweis: Diese Lösung kann dazu genutzt werden, eine solche Gruppe von Verdächtigen zu erzeugen. Das Ergebnis ist im folgenden Diagramm dargestellt:



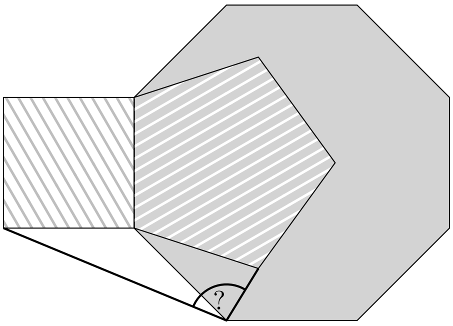
Aufgabe 14. Auf dem abgebildeten Würfel steht auf jeder Seitenfläche eine positive ganze Zahl. Außerdem sind alle Produkte von zwei Zahlen auf gegenüberliegenden Seitenflächen gleich groß. Die Zahlen auf den Seitenflächen müssen nicht zwingend verschieden sein. Ermittle den kleinstmöglichen Wert für die Summe aller Zahlen auf dem Würfel.



Ergebnis: 40

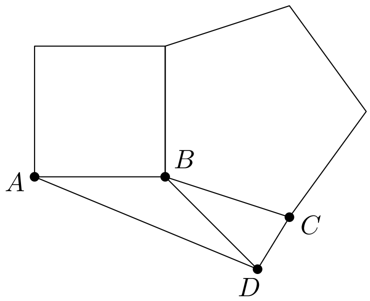
Lösungsweg: Sei P der Wert des Produkts der Zahlen auf gegenüberliegenden Seitenflächen. Es ist klar, dass je größer P ist, desto größer auch die Summe aller Zahlen auf dem Würfel ist. Da P durch alle drei abgebildeten Zahlen teilbar sein muss, ist der kleinste Wert für P das kleinste gemeinsame Vielfache der drei Zahlen und somit $P = 36$. Unter diesen Umständen sind die drei nicht sichtbaren Zahlen 3, 4 und 6 und die gesuchte Summe beträgt $6+9+12+6+4+3 = 40$.

Aufgabe 15. In der Abbildung sind ein regelmäßiges Achteck, ein regelmäßiges Fünfeck und ein Quadrat zu sehen. Bestimme die Größe des Winkels zwischen den beiden fett gedruckten Strecken.



Ergebnis: 99°

Lösungsweg: Man beschriftet die Abbildung wie folgt:



Der Winkel $\angle DBC$ ist die Differenz der Innenwinkel des Achtecks und des Fünfecks, also $\angle DBC = 135° - 108° = 27°$. Leicht zu sehen ist, dass $\angle ABD = 135°$ gilt. Da die Dreiecke $\triangle ADB$ und $\triangle CBD$ gleichschenklig sind, ergibt sich

$$\angle CDB = \tfrac{1}{2}(180° - \angle DBC) = 76{,}5°,$$
$$\angle BDA = \tfrac{1}{2}(180° - \angle ABD) = 22{,}5°.$$

Deswegen folgt

$$\angle CDA = \angle CDB + \angle BDA = 99°.$$

Aufgabe 16. Der Chauffeur eines Ministers verlässt das Ministerium zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Früh, um den Minister zu Hause abzuholen und ihn zum Ministerium zu fahren. Der Minister wacht jeden Tag um dieselbe Zeit auf und der Fahrer kommt exakt zu dem Zeitpunkt an, zu dem der Minister abfahrbereit ist. Heute ist der Minister zu früh aufgewacht und daher war er eine Stunde früher für die Abfahrt bereit als normalerweise. Er entschied sich, dem Fahrer, welcher das Ministerium wie gewohnt verlässt, entgegen zu gehen. Als der Minister auf seinen Fahrer trifft, steigt er ein und sie fahren zum Ministerium, wo sie heute zwanzig Minuten früher als gewohnt eintreffen. Wie viele Minuten ging der Minister zu Fuß?

Hinweis: Es wird angenommen, dass das Auto immer mit derselben Geschwindigkeit fährt und das Einsteigen des Ministers keine Zeit beansprucht.

Ergebnis: 50

Lösungsweg: Die eine Stunde, die der Minister durch das frühere Aufstehen gewonnen hat, setzt sich zusammen aus der unbekannten Zeit t des Fußmarsches und der übrigen Zeit, die das Auto benötigen würde, um vom Treffpunkt zum Haus des Ministers zu kommen. Letztere ist offensichtlich die Hälfte der insgesamt gesparten Zeit. Daher gilt

$$60 = t + \frac{20}{2}$$

also $t = 50$.

Aufgabe 17. Wie lautet die kleinste positive ganze Zahl mit mindestens zwei Stellen, deren Wert auf $\frac{1}{29}$ der ursprünglichen Zahl sinkt, wenn ihre erste (d.h. linke) Ziffer gelöscht wird?

Ergebnis: 725

Lösungsweg: Sei d die erste Ziffer der Zahl, k die Zahl, die man erhält, wenn man die erste Ziffer löscht, und n die Anzahl der Ziffern von k. Dann ist die ursprüngliche Zahl gleich $10^n d + k$ und die Bedingung kann wie folgt angegeben werden:

$$10^n d + k = 29k$$

oder

$$28k = 10^n d.$$

Damit die rechte Seite durch $28 = 2^2 \cdot 7$ teilbar ist, muss $d = 7$ und $n \geq 2$ gelten. Schließlich ergibt die Wahl von $n = 2$ den Wert $k = 25$ und damit das kleinstmögliche Ergebnis 725.

Aufgabe 18. Wie oft in 24 Stunden stehen der Minuten- und der Stundenzeiger einer Uhr senkrecht aufeinander?

Ergebnis: 44

Lösungsweg: In 24 Stunden macht der Stundenzeiger zwei, der Minutenzeiger 24 ganze Umdrehungen. Somit überrundet der Minutenzeiger den Stundenzeiger 22 Mal. Während jeder dieser Umdrehungen steht der Minutenzeiger genau zweimal senkrecht zum Stundenzeiger und daher lautet die Antwort 44.

Aufgabe 19. Ermittle alle vierstelligen Zahlenpalindrome, die als Summe von zwei dreistelligen Zahlenpalindromen geschrieben werden können.

Hinweis: Ein *Zahlenpalindrom* ist eine Zahl, die vorwärts wie rückwärts gelesen identisch ist, z.B. 2018102. Eine solche Zahl kann nicht mit Null beginnen.

Ergebnis: 1111, 1221

Lösungsweg: Sei $\overline{abba}$ so ein Zahlenpalindrom. Da es als Summe von zwei dreistelligen Zahlen geschrieben werden kann, darf die Zahl nicht größer als 1998 sein, somit muss $a = 1$ sein. Sei $\overline{1bb1}$ gleich der Summe $\overline{cdc} + \overline{xyx}$. Dann folgt

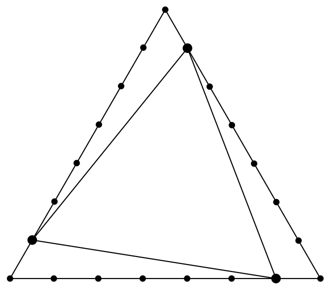
$$1001 + 110\,b = 101(c + x) + 10(d + y).$$

Weil die linke Seite mit 1 endet, muss $c+x$ auch mit 1 enden. Da c und x Ziffern zwischen 1 und 9 sind, folgt $c+x = 11$. Einsetzen und Vereinfachen ergibt

$$11(b - 1) = d + y.$$

Da d und y Ziffern sind, kann die rechte Seite nicht größer als 18 sein. Somit ist $b-1$ entweder 0 oder 1. Beide Optionen sind möglich: $1111 = 505 + 606$ und $1221 = 565 + 656$.

Aufgabe 20. Die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks sind jeweils so im Verhältnis 6 zu 1 aufgeteilt, dass die Teilungspunkte, wie in der Abbildung zu sehen, wieder ein gleichseitiges Dreieck bilden. Bestimme das Verhältnis des Flächeninhalts des kleineren gleichseitigen Dreiecks zum Flächeninhalt des größeren gleichseitigen Dreiecks.



Ergebnis: 31/49

Lösungsweg: Der Flächenanteil eines jeden der drei kleineren Restdreiecke ist

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7} = \frac{6}{49}$$

des großen gleichseitigen Dreiecks, da die Höhen 1/7 und die Grundlinien 6/7 der entsprechenden Strecken im großen gleichseitigen Dreieck sind. Deshalb ist das gesuchte Verhältnis

$$1 - 3 \cdot \frac{6}{49} = \frac{31}{49}.$$

Aufgabe 21. Finde alle Quadrupel (a, b, c, d) von positiven ganzen Zahlen, die folgende Bedingung erfüllen: Wenn man die Buchstaben in der untenstehenden Tabelle durch die zugeordneten Zahlen ersetzt, sollen a, b, c bzw. d die genaue Anzahl der Einser, Zweier, Dreier bzw. Vierer in der Tabelle angeben.

1	2	3	4
a	b	c	d

Ergebnis: $(2, 3, 2, 1)$, $(3, 1, 3, 1)$

Lösungsweg: Keine Zahl kann in der Tabelle mehr als fünfmal erscheinen. Auch die Zahl 5 kann nicht auftreten, da sie den Platz jener Zahl einnehmen müsste, der von der fünfmal erscheinenden Zahl verwendet wird. Daher können nur die Zahlen 1, 2, 3 und 4 eingesetzt werden.

Man untersucht zunächst den Wert für d. Im Fall $d = 2$ muss eine der Zahlen a, b, c gleich 4 sein und weil es dann nur mehr zwei weitere freie Plätze gibt, müsste es b sein. Jedoch ist $(2, 4, 2, 2)$ eindeutig kein gültiges Quadrupel. Die Optionen $d = 3$ und $d = 4$ führen sogar noch schneller zu einem Widerspruch. Folglich muss $d = 1$ gelten.

Man weiß, dass $a \in \{2, 3\}$ sein muss. Angenommen $a = 2$, dann erhält man $b, c \in \{2, 3\}$, denn es kann keine weiteren Einser und Vierer geben. Allerdings würde $b = 2$ der Bedingung für b widersprechen, weil es dann drei Zweier gäbe. Daher gilt $b = 3$ und daraus folgt $c = 2$. Dies ergibt die Lösung $(2, 3, 2, 1)$. Im Fall $a = 3$ muss es in der Tabelle noch einen weiteren Einser geben, und dies kann nicht c sein, denn es gibt bereits einen weiteren Dreier. Daher folgt $b = 1$ und somit $c = 3$, also ist das Quadrupel $(3, 1, 3, 1)$ eine weitere Lösung.

Aufgabe 22. Diego hat sein Passwort vergessen. Er erinnert sich nur mehr daran, dass es aus neun Kleinbuchstaben des lateinischen Alphabets besteht und die Wörter 'math' und 'drama' enthält. Wie viele Passwörter erfüllen diese Anforderungen?

Hinweis: Die Wörter sind als Teilzeichenfolge enthalten, demzufolge enthält zum Beispiel 'martha' nicht 'math'. Es gibt insgesamt 26 Buchstaben im Alphabet.

Ergebnis: 2030

Lösungsweg: Falls sich die Teilwörter 'math' und 'drama' nicht überschneiden, gibt es zwei Möglichkeiten für die Anordnung: 'dramamath' und 'mathdrama'.

Falls sich die Teilwörter überschneiden, gibt es nur eine Art der Anordnung: 'dramath'. Es ergeben sich drei Möglichkeiten die restlichen zwei Buchstaben anzuordnen: '∗∗dramath', '∗dramath∗', 'dramath∗∗'. In jedem Fall gibt es $26^2 = 676$ Möglichkeiten, um diese zwei Buchstaben auszuwählen. Damit gibt es in diesem Fall $676 \cdot 3 = 2028$ mögliche Passwörter.

Insgesamt sind es $2028 + 2 = 2030$ mögliche Passwörter, welche die gewünschten Anforderungen erfüllen.

Aufgabe 23. Wählt man zwei beliebige verschiedene Zahlen aus der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie aufeinander folgend sind, genau $\frac{1}{21}$. Bestimme n.

Ergebnis: 42

Lösungsweg: Es gibt $n-1$ Paare aufeinander folgender Zahlen in der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$ und $\frac{1}{2}n(n-1)$ Möglichkeiten, zwei verschiedene Zahlen aus der n-elementigen Menge beliebig auszuwählen. Also ist

$$\frac{n-1}{\frac{1}{2}n(n-1)} = \frac{2}{n} = \frac{1}{21}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass zwei aufeinander folgende Zahlen gewählt wurden. Somit ergibt sich $n = 42$.

Aufgabe 24. Andreas, Bernd und Christoph spielten Tischtennis nach folgenden Regeln: In jeder Runde spielten zwei Spieler gegeneinander und der dritte pausierte. Der Gewinner einer Runde spielte dann in der nächsten Runde gegen den ausgeruhten Spieler. In der ersten Runde spielte Andreas gegen Bernd. Nach mehreren Runden hatte Andreas 17 und Bernd 22 Siege erzielt. Wie oft spielten Andreas und Bernd gegeneinander?

Ergebnis: 20

Lösungsweg: Wenn Christoph eine Runde gewinnt, hat das keinen Einfluss auf die Anzahl der Runden, die Andreas oder Bernd gewonnen haben, und es hat ebenso keinen Einfluss auf die Rundenzahl, wenn Christoph nicht spielt. Daher können wir annehmen, dass Christoph immer verliert. Mit anderen Worten, jeder Sieg von Andreas über Bernd erhöht die Gesamtpunktzahl von Andreas um zwei, außer es geschah in der letzten Runde, und umgekehrt. Da Andreas eine ungerade Anzahl von Siegen hat, muss er in der letzten Runde gegen Bernd gespielt und gewonnen haben. Wenn man nun eine weitere Runde *Andreas gegen Christoph, gewonnen von Andreas* hinzufügt, dann ist die Gesamtanzahl der Runden, in denen Christoph nicht gespielt hat, gleich der Hälfte der Summe der Endergebnisse von Andreas und Bernd, also $(18 + 22)/2 = 20$.

Aufgabe 25. Kunden bei einem Online-Shop können ihre Zufriedenheit mit einem gekauften Artikel äußern, indem sie ihn mittels einer Fünf-Punkte-Skala bewerten (1 Stern = schlecht, 5 Sterne = ausgezeichnet). Die durchschnittliche Bewertung eines neu herausgekommenen Smartphones war letzte Woche 3,46 Sterne. Als zwei weitere Personen ihre Bewertungen zu Beginn dieser Woche abgaben, stieg sie auf den aktuellen Durchschnitt von 3,5 Sternen. Wie viele Personen haben das Smartphone bisher bewertet?

Ergebnis: 52

Lösungsweg: Sei k die ursprüngliche Anzahl an Bewertungen und x deren Summe. Weiters seien a, b die zwei Bewertungen dieser Woche. Dann gilt

$$\frac{x}{k} = 3{,}46 \qquad \text{und} \qquad \frac{x+a+b}{k+2} = 3{,}5$$

oder

$$x = \left(3 + \tfrac{23}{50}\right)k, \tag{1}$$

$$x + a + b = \left(3 + \tfrac{1}{2}\right)k + 7. \tag{2}$$

Gleichung (1) impliziert, dass k ein Vielfaches von 50 ist. Darüber hinaus erhält man nach Subtraktion der Gleichung (1) von (2)

$$a + b - 7 = \frac{k}{25}.$$

Wegen $a, b \leq 5$ ist die linke Seite eine positive ganze Zahl kleiner oder gleich 3, daher gilt $k \leq 75$. Daraus folgt insgesamt $k = 50$. Inklusive der beiden Kundenbewertungen dieser Woche ergibt das 52 Personen, die das Smartphone bisher bewertet haben.

Aufgabe 26. Sandi hat vier Paar Socken, bei denen Montag, Dienstag, Mittwoch oder Donnerstag jeweils auf zwei Socken geschrieben steht. Wie viele Möglichkeiten gibt es, all diese Socken von Montag bis Donnerstag zu tragen, wenn die beiden Socken an Sandis Füßen unterschiedlich sein sollen und keiner der beiden mit dem aktuellen Tag übereinstimmen soll? Kein Socken darf dabei wiederholt getragen werden.

Hinweis: Jeder Socken kann an jedem Fuß getragen werden, d.h. es gibt keine „rechten“ und „linken“ Socken. Außerdem wird beim Tragen eines Paars an Socken nicht unterschieden, welcher Socken sich auf welchem Fuß befindet.

Ergebnis: 9

Lösungsweg: Der Einfachheit halber verwendet man die Zahlen 1, 2, 3, 4 anstelle der Namen der Tage. Man beachte, dass jedem Tag drei verschiedene Zahlen zugeordnet sind: Die tatsächliche Zahl für den Tag und die zwei Zahlen der jeweils getragenen Socken. Daher können wir die Zuordnung der Socken für jeden Tag äquivalent mit einer einzigen Zahl beschreiben, und zwar der einzigen der vier Zahlen, die nicht im oben erwähnten Tripel erscheint. Daraus folgt, dass die gültigen Zuordnungen von Socken den Umgruppierungen von $(1, 2, 3, 4)$ entspricht, d.h. jenen Permutationen, die keine der Zahlen an der ursprünglichen Position belassen. Die Anzahl der erlaubten Permutationen kann man wie folgt berechnen: Es gibt drei Möglichkeiten, die Zahl 1 zu platzieren, sei $n \neq 1$ ihre Position. Jetzt gibt es ebenfalls drei Möglichkeiten um n zu platzieren. Man kann leicht erkennen, dass die verbleibenden zwei Zahlen nur auf eine einzige Art zugeordnet werden können. Daher gibt es $3 \cdot 3 = 9$ erlaubte Permutationen und die gleiche Anzahl an Möglichkeiten für Sandis Sockenwahl.

Aufgabe 27. Eine Jury bestehend aus 26 Mathematikern musste (mindestens) fünf Filme für die Prämierung auf einem Mathe-Film-Festival nominieren. Es standen 16 Filme zur Auswahl. Die Jury ging dabei folgendermaßen vor: Jedes Jurymitglied wählte fünf verschiedene Filme und die fünf Filme mit den meisten Stimmen wurden nominiert. Falls es auf dem fünften Platz einen Gleichstand gab, wurden alle diese Filme nominiert. Bestimme die kleinstmögliche Anzahl von Stimmen, die ein Film bekommen konnte, so dass er – unabhängig von den Ergebnissen der anderen Filme – nominiert wurde.

Ergebnis: 21

Lösungsweg: Insgesamt gibt es $26 \cdot 5 = 130$ Stimmen, die vergeben werden. Falls ein Film 20 oder weniger Stimmen erhält, dann können die übrigen 110 Stimmen so aufgeteilt werden, dass fünf Filme jeweils 21 Stimmen bekommen. Falls ein Film mindestens 21 Stimmen erhält und nicht nominiert ist, würde das bedeuten, dass mindestens fünf Filme mindestens 22 Stimmen bekommen haben, was aber zu einem Widerspruch führt, da es dann insgesamt $21 + 5 \cdot 22 = 131$ Stimmen geben müsste.

Aufgabe 28. Eine reelle Funktion f genügt der Gleichung $f(x) + xf(1-x) = x$ für alle reellen Zahlen x. Bestimme $f(-2)$.

Ergebnis: 4/7

Lösungsweg: Aus der Gleichung $f(-2) - 2f(3) = -2$ sieht man, dass man $f(3)$ auch bestimmen muss. Wegen $f(3) + 3f(-2) = 3$ erhält man zwei lineare Gleichungen mit den Unbekannten $f(-2)$ und $f(3)$. Multipliziert man die zweite Gleichung mit 2 und addiert beide, so ergibt sich $f(-2) = \frac{4}{7}$.

Aufgabe 29. Die zweistelligen Zahlen n, a, b, o, j wurden so gewählt, dass deren Produkt $naboj$ durch 4420 teilbar ist. Bestimme den größtmöglichen Wert für die Summe $n + a + b + o + j$.

Ergebnis: 471

Lösungsweg: Die Primfaktorisierung der Zahl 4420 lautet $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17$. Das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 13 und 17 ist 221. Somit gibt es keine zweistellige Zahl, die durch diese beiden Zahlen teilbar ist. Also muss eine der Zahlen n, a, b, o, j durch 13 und eine andere durch 17 teilbar sein. Sei o.B.d.A. n durch 17 teilbar und a durch 13. Dann folgt $n \leq 85 = 5 \cdot 17$ und $a \leq 91 = 7 \cdot 13$.

Angenommen es ist $n = 85$ und $a = 91$. Man sieht, dass $n = 85$ durch 5 teilbar ist und es muss nur noch die Teilbarkeit durch 4 erfüllt werden. Falls n und a ungerade sind, dann muss boj durch 4 teilbar sein. Folglich muss eine der Zahlen b, o, j durch 4 oder zwei der Zahlen durch 2 teilbar sein. Die größere Summe erhält man im zweiten Fall, also für $b = o = 98$ und $j = 99$. Die Summe lautet daher $n + a + b + o + j = 85 + 91 + 98 + 98 + 99 = 471$.

Schlussendlich werden noch die Möglichkeiten $n < 85$ oder $a < 91$ überprüft. Da die Zahlen n und a durch 17 und 13 teilbar sein müssen, folgt $n \leq 68 = 85 - 17$ oder $a \leq 78 = 91 - 13$. Dann kann die Summe $n + a + b + o + j$ im ersten Fall höchstens $68 + 91 + 3 \cdot 99 = 456$ und im zweiten Fall höchstens $85 + 78 + 3 \cdot 99 = 460$ sein, aber beide Male ist die Summe kleiner als die vorher errechnete Summe.

Aufgabe 30. Martina hat in einem Online-Sportgeschäft acht Tennisbälle und einen Handball bestellt. Die Bälle sind perfekt kugelförmig und wurden in einer würfelförmigen Schachtel verpackt, sodass jeder Tennisball drei der sechs Flächen der Schachtel und den Handball berührte. Der Radius des Handballs beträgt 10 cm und der Radius jedes Tennisballs beträgt 5 cm. Ermittle die Kantenlänge der Schachtel in Zentimetern.

Ergebnis: $10(1 + \sqrt{3})$

Lösungsweg: Die Raumdiagonale der Schachtel verläuft durch die Mittelpunkte des Handballs und zweier Tennisbälle, und auch durch die Berührpunkte dieser drei Bälle. Die einzigen Abschnitte der Diagonale, die nicht innerhalb eines Balls verlaufen, sind die Stücke zwischen je einem Tennisball und der Ecke der Schachtel. Der Abstand vom Mittelpunkt eines Tennisballs zur Ecke der Schachtel ist die Hälfte der Raumdiagonale des umschriebenen Würfels dieses Balls. Daher ist die Länge der Diagonale der Schachtel die Summe aus

- zweimal der Hälfte der Diagonalen des umschriebenen Würfels eines Tennisballs,

- zweimal dem Radius eines Tennisballs und
- dem Durchmesser des Handballs.

Daher erhält man für die Länge der Diagonale

$$10\sqrt{3} + 10 + 20 = 30 + 10\sqrt{3}$$

und für die Kantenlänge der Schachtel

$$\frac{30 + 10\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 10(1 + \sqrt{3}).$$

Aufgabe 31. Die Zahl 2^{29} ist im Dezimalsystem ausgeschrieben eine neunstellige Zahl, deren Ziffern paarweise verschieden sind. Welche Ziffer fehlt?

Ergebnis: 4

Lösungsweg: Die Zweierpotenz 2^{29} kann ohne größeren Aufwand von Hand berechnet werden: Wegen $2^{10} = 1024$ kann man durch Multiplikation 1024^3 errechnen und dann durch 2 dividieren, so dass man schließlich $2^{29} = 536\,870\,912$ erhält.

Man kann auch zur Lösung gelangen, indem man ausnutzt, dass eine Zahl und ihre Quersumme den selben Rest modulo 9 besitzen. Betrachtet man die Zweierpotenzen modulo 9,

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
2^n mod 9	2	4	8	7	5	1	2	4	...

so erkennt man, dass sich die Reste von 2^n mod 9 periodisch wiederholen; die Periodenlänge ist 6. Wegen $29 \equiv 5 \bmod 6$ bedeutet dies $2^{29} \equiv 2^5 \equiv 5 \bmod 9$.

Sei x die fehlende Ziffer. Da die Summe aller Ziffern 45 ergibt, gilt dann für die Quersumme $\mathrm{Q}(2^{29}) = 45 - x \equiv 5 \bmod 9$ und deshalb $x \equiv 4 \bmod 9$. Folglich ist 4 die fehlende Ziffer in der Darstellung von 2^{29}.

Aufgabe 32. Beim Aufräumen des Dachbodens fand Ben einen alten Taschenrechner, der bei jedem Ergebnis nur die ersten beiden Nachkommastellen zeigte, aber Quadratwurzeln berechnen konnte. So zeigte er zum Beispiel für $\sqrt{4}$ als Ergebnis 2,00 an und für $\sqrt{6} = 2{,}44949\ldots$ zeigte er 2,44 an. Wie lautet die kleinste positive ganze Zahl, die kein Quadrat einer ganzen Zahl ist, aber für deren Quadratwurzel Bens Taschenrechner trotzdem zwei Nullen nach dem Komma anzeigen würde?

Ergebnis: 2501

Lösungsweg: Man bezeichnet mit $\mathrm{ebs}(n)$ die ersten beiden Stellen nach dem Komma von $\sqrt{n}$. Es ist klar, dass $\mathrm{ebs}(n)$ ebenfalls wächst, wenn n von einer Quadratzahl zur nächsten ansteigt. Da wir nach der kleinsten ganzen Zahl n suchen, muss diese die Form $k^2 + 1$ für eine positive ganze Zahl k haben.

Wenn $\sqrt{k^2+1}$ auf seinen ganzzahligen Teil abgerundet wird, ist das Ergebnis k und daher ist $\sqrt{k^2+1} - k$ eine Zahl größer 0 und kleiner 1. Die Aussage $\mathrm{ebs}(k^2 + 1) = 0$ ist somit äquivalent zu

$$\sqrt{k^2+1} - k < \frac{1}{100}.$$

Addieren von k zu beiden Seiten, Quadrieren (beide Seiten sind positiv) und Umstellen ergibt

$$k > 50\left(1 - \frac{1}{100^2}\right).$$

Die rechte Seite ist eine Zahl größer 49 und kleiner 50. Da k eine ganze Zahl ist, folgt $k \geq 50$. Somit ist $n = 50^2 + 1 = 2501$ die gesuchte kleinste Zahl.

Aufgabe 33. In jede Zelle einer Tabelle der Größe 2018×2018 soll eine Zahl aus $\{1, 2, \ldots, 9\}$ geschrieben werden, sodass in jedem Quadrat der Größe 3×3 die Summe der darin enthaltenen Zahlen durch 9 teilbar ist. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, um dies zu erreichen?

Ergebnis: 9^{8068}

Lösungsweg: Jede Füllung der 8068 Zellen, welche die zwei untersten Reihen und die ersten zwei Spalten am linken Rand bilden, legt die gesamte Füllung fest, da die übrigen Zahlen in aufeinander folgenden Diagonalen eindeutig bestimmt sind. Ein Beispiel dafür ist in der Abbildung zu sehen.

9	8				
9	7				
5	2				
4	1				
3	6	9	9	1	3
2	9	1	7	4	4

$\rightarrow$

9	8				
9	7				
5	2				
4	1	1			
3	6	9	9	1	3
2	9	1	7	4	4

$\rightarrow$

9	8				
9	7				
5	2	5			
4	1	1	2		
3	6	9	9	1	3
2	9	1	7	4	4

$\rightarrow$

9	8				
9	7	2			
5	2	5	1		
4	1	1	2	2	
3	6	9	9	1	3
2	9	1	7	4	4

Offensichtlich legt jedes korrekte Füllen der 2018×2018 Tabelle auch eine Füllung dieser 8068 Zellen am Rand fest. Daher entspricht die Anzahl der beliebigen Füllungen dieser Zellen der Anzahl der Möglichkeiten, die gesamte Tabelle zu füllen. Die gesuchte Anzahl ist also 9^{8068}.

Aufgabe 34. Bestimme alle Paare natürlicher Zahlen (n, m), welche die Gleichung $4^n + 260 = m^2$ erfüllen.

Ergebnis: $(3, 18)$, $(6, 66)$

Lösungsweg: Die gegebene Gleichung ist äquivalent zu $m^2 - (2^n)^2 = 260$ und kann deshalb zu $(m - 2^n)(m + 2^n) = 260$ faktorisiert werden. Unter Berücksichtigung der Primfaktorzerlegung $260 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13$ sind aufgrund von $(m-2^n) < (m+2^n)$ also nur die Zerlegungen

$$260 = 1 \cdot 260 = 2 \cdot 130 = 4 \cdot 65 = 5 \cdot 52 = 10 \cdot 26 = 13 \cdot 20$$

möglich. Wegen $(m + 2^n) - (m - 2^n) = 2^{n+1}$ gibt es nur die zwei Möglichkeiten $26 - 10 = 2^4$ und $130 - 2 = 2^7$. Dies führt zu den gesuchten Lösungspaaren $(3, 18)$ und $(6, 66)$.

Aufgabe 35. In einem gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ geht von B ein Lichtstrahl aus und trifft bei D auf die Seite AC, sodass $\overline{DC} : \overline{AC} = 1 : 2018$ gilt. Der Lichtstrahl wird so reflektiert, dass der Einfallswinkel gleich dem Ausfallswinkel ist. Der Strahl wird immer wieder reflektiert, wenn er auf eine Seite des Dreiecks $\triangle ABC$ trifft. Wie oft wird der Strahl reflektiert (einschließlich der ersten Reflexion) bis er auf eine Ecke des Dreiecks $\triangle ABC$ trifft?

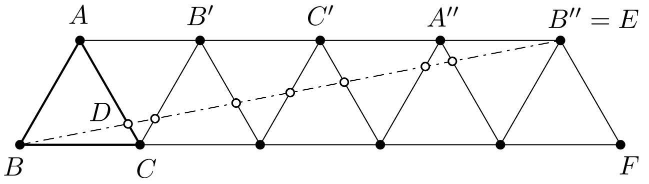
Ergebnis: 4033

Lösungsweg: Anstelle der Reflexion des Lichtstrahls lässt man ihn gerade weiterlaufen und spiegelt stattdessen das jeweilige Dreiecke entlang der Seite, auf die der Strahl trifft. Nun soll gezeigt werden, dass eine aneinander gesetzte Reihe dieser gespiegelten Dreiecke ausreicht, damit der Lichtstrahl eine Ecke des Dreiecks erreicht.

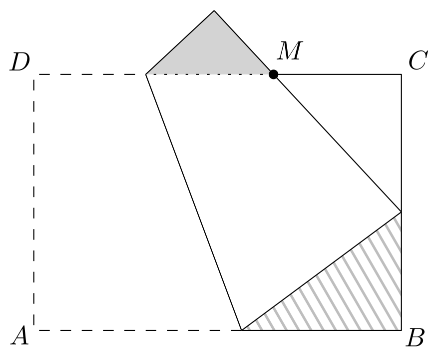
Sei E der Schnittpunkt des Strahls BD mit der Geraden durch A, die parallel zu BC ist. Ferner sei F ein Punkt auf BC so, dass $EF \parallel AC$ ist. Dann sind die Dreiecke $\triangle BCD$ und $\triangle BFE$ ähnlich und es gilt $\overline{BF} = 2018 \cdot \overline{BC}$. Dies bedeutet, dass man den Punkt E durch die oben genannte Art der Spiegelungen des Dreiecks $\triangle ABC$ erhalten kann und E ist sicherlich der erste Punkt auf dem Strahl BD, für den das zutrifft.

Es ist leicht zu sehen, dass die Strecke BE genau $2 \cdot 2017 - 1 = 4033$ Strecken in der Reihe der Dreiecke schneidet, was der Anzahl der Spiegelungen des Lichtstrahl entspricht.

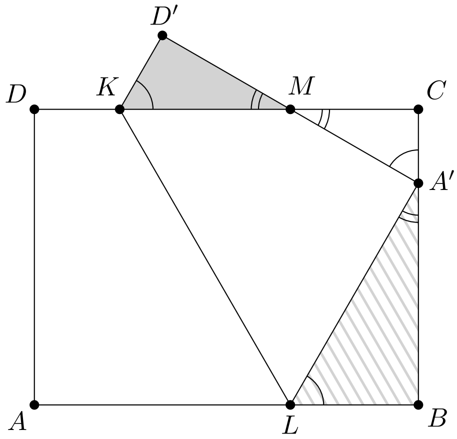
Die Abbildung zeigt eine Lösung, in der das ursprüngliche Verhältnis auf $\overline{DC} : \overline{AC} = 1 : 5$ geändert wurde.



Aufgabe 36. Ein rechteckiges Blatt Papier $ABCD$ wurde so gefaltet, dass der (ursprüngliche) Punkt A auf der Seite BC liegt und der Punkt M, in dem sich CD und die (übersprüngliche) Seite DA schneiden, die Seite CD drittelt. Es gilt also $\overline{CD} = 3 \cdot \overline{CM}$. Falls der Flächeninhalt des grauen überstehenden Dreiecks 1 beträgt, wie groß ist dann der Flächeninhalt des gestreiften Dreiecks?



Ergebnis: 9/4
Lösungsweg: Die Abbildung wird wie folgt beschriftet:



Alle drei Dreiecke $\triangle KMD'$, $\triangle MA'C$ und $\triangle LBA'$ sind rechtwinklig und ähnlich zueinander, was durch einfaches Berechnen der Winkel gezeigt werden kann. Aufgrund der Ähnlichkeit und wegen $\overline{KD} = \overline{KD'}$ und $\overline{LA} = \overline{LA'}$ ergibt sich

$$\overline{D'K} + \overline{KM} = \overline{DM} = \tfrac{2}{3} \cdot \overline{DC} = \tfrac{2}{3} \cdot \overline{AB}$$

und

$$\overline{A'L} + \overline{LB} = \overline{AB}.$$

Betrachtet man die oben erwähnten Ähnlichkeiten, so sieht man, dass $A'L$ der Strecke KM entspricht und LB der Strecke KD'. Deshalb ist das Verhältnis der Strecken 3/2. Da aber der Flächeninhalt gesucht ist, ist die Lösung $(3/2)^2 = 9/4$.

Aufgabe 37. Bei der Polynomdivision von $x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{11} + x^{2017} + x^{2018}$ durch das Polynom $x^2 - 1$ ergibt sich ein Restpolynom. Bestimme diejenige Zahl x, für die dieses Restpolynom den Wert 1111 annimmt.
Ergebnis: 185
Lösungsweg: Das Polynom kann umgeformt werden zu

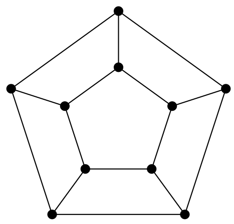
$$\begin{aligned} &x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{11} + x^{2017} + x^{2018} = \\ &\qquad = x(x^2-1) + x(x^4-1) + x(x^6-1) + x(x^8-1) + x(x^{10}-1) + x(x^{2016}-1) + (x^{2018}-1) + 6x + 1. \end{aligned}$$

Wegen

$$x^{2k} - 1 = (x^2-1)(x^{2k-2} + x^{2k-4} + \cdots + 1)$$

für alle positiven ganzen Zahlen k sind alle geklammerten Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichung durch $x^2 - 1$ teilbar. Da der Grad von $6x + 1$ kleiner ist als der von $x^2 - 1$, ist $6x + 1$ der gesuchte Rest bei der Polynomdivision. Durch Lösen der Gleichung $1111 = 6x + 1$ erhält man die Antwort $x = 185$.

Aufgabe 38. Es gibt zehn Städte im Land Pentagonia. Jede Stadt ist mit drei anderen Städten durch Bahnlinien verbunden, so wie in der Abbildung dargestellt. Die Kartellgesetze des Landes verlangen, dass keine zwei Bahnlinien mit gemeinsamer Haltestelle von der gleichen Bahngesellschaft betrieben werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Bahnlinien den drei vorhandenen Bahngesellschaften gesetzlich zulässig zuzuordnen?

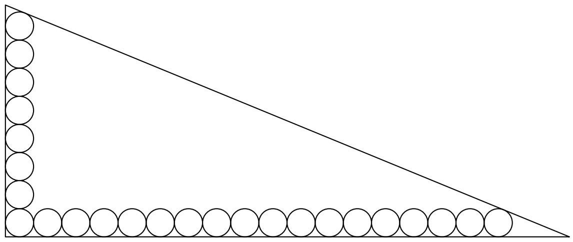


Ergebnis: 30

Lösungsweg: Betrachtet man das äußere Fünfeck, dann werden zwei der Bahngesellschaften (mit X und Y bezeichnet) jeweils zwei Bahnlinien zugeordnet und der dritten Bahngesellschaft (Z) eine Bahnlinie. Es gibt dann eine Stadt, von der aus die Reihenfolge $XYXYZ$ ist, wenn bei ihr gestartet wird. Es ist einfach zu zeigen, dass für den Rest des Netzwerks nur eine Belegung möglich ist: Die Bahnlinien des inneren Fünfecks werden gleich wie die äußeren Gegenstücke beschriftet und der Verbindung muss die jeweils noch nicht verwendete Bahngesellschaft zugeordnet werden.

Das bedeutet, dass die Anzahl an korrekten Zuordnungen des gesamten Netzwerks gleich der Anzahl der Zuordnungen des äußeren Fünfecks ist. Es gibt sechs Möglichkeiten, die Bahngesellschaften zu X, Y und Z zuzuordnen, und fünf Möglichkeiten für die Stadt, bei der die Zuordnung $XYXYZ$ startet. Das ergibt insgesamt $5 \cdot 6 = 30$ Möglichkeiten.

Aufgabe 39. Ein rechtwinkliges Dreieck enthält 25 Berührkreise mit Radius 1 wie in der Abbildung dargestellt.



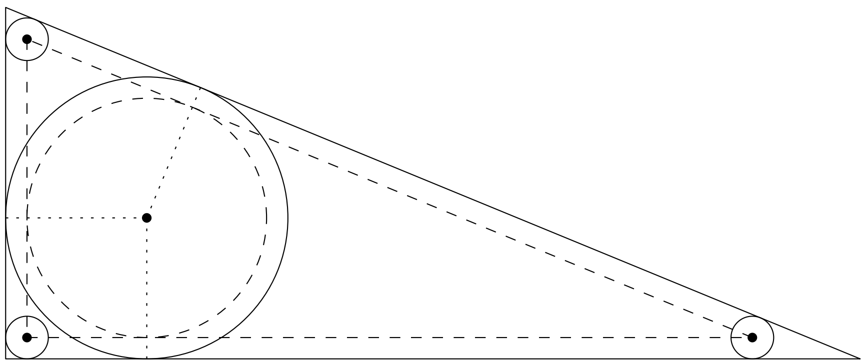
Bestimme den Inkreisradius des Dreiecks!

Ergebnis: $25 - 13\sqrt{2}$

Lösungsweg: Betrachte das Dreieck, dessen Eckpunkte die Mittelpunkte der drei Kreise in den Ecken des ursprünglichen Dreiecks sind. Das ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Schenkellängen 14 und 34. Die Länge der Hypotenuse beträgt daher

$$\sqrt{14^2 + 34^2} = 26\sqrt{2}.$$

Sein Inkreisradius kann über die Tangentenabschnitte an den Inkreis durch $(14 + 34 - 26\sqrt{2})/2 = 24 - 13\sqrt{2}$ berechnet werden. Da die Seiten des ursprünglichen Dreiecks parallel zu den Seiten des eben betrachteten Dreiecks sind, der Abstand 1 beträgt und außerdem die Inkreise der beiden Dreiecke denselben Mittelpunkt haben, beträgt der gesuchte Inkreisradius $25 - 13\sqrt{2}$.



Aufgabe 40. Julia hat für eine (endliche) Liste von ganzen Zahlen eine Operation namens *Julieren* erfunden: Von einer gegebenen Liste erstellt sie vier Kopien, erhöht deren Einträge jeweils um 0, 2, 3 bzw. 5 und verkettet die Ergebnisse, sodass sie wieder eine einzige Liste ergeben. Wenn man zum Beispiel mit der Liste $(8, 3)$ beginnt, lautet das Ergebnis nach dem Julieren $(8, 3, 10, 5, 11, 6, 13, 8)$. Wenn Julia nun mit der einelementigen Liste (0) beginnt und so lange juliert, bis das Ergebnis mindestens 2018 Einträge hat, wie lautet dann der Eintrag an der 2018-ten Stelle?

Hinweis: Der Eintrag ganz links wird als der erste gezählt.

Ergebnis: 17

Lösungsweg: Der Einfachheit halber nummeriert man die Positionen in der Liste beginnend mit null. In diesem Fall zeigt ein einfaches Induktionsargument, dass die Stelle einer in Basis 4 angegeben Zahl beschreibt, durch welche Operationen und in welcher Reihenfolge die Zahl an der angegebenen Position ermittelt wurde. Zum Beispiel sieht die Liste von Julia nach zweimaligem Julieren folgendermaßen aus:

$$(\underset{00}{0+0}, \underset{01}{0+2}, \underset{02}{0+3}, \underset{03}{0+5}, \underset{10}{2+0}, \underset{11}{2+2}, \underset{12}{2+3}, \underset{13}{2+5}, \underset{20}{3+0}, \underset{21}{3+2}, \underset{22}{3+3}, \underset{23}{3+5}, \underset{30}{5+0}, \underset{31}{5+2}, \underset{32}{5+3}, \underset{33}{5+5})$$

Dabei geben die Zahlen unter den Einträgen die Position des jeweiligen Eintrags in der Basis 4 an. Da 2017 im Zahlensystem zur Basis 4 die Zahl 133201 ergibt, ist die Zahl an der 2017ten Stelle

$$2 + 5 + 5 + 3 + 0 + 2 = 17.$$

Aufgabe 41. Bestimme die kleinste positive ganze Zahl n, sodass die Gleichung

$$(x^2+y^2)^2+2nx(x^2+y^2)=n^2y^2$$

eine Lösung (x,y) mit positiven ganzen Zahlen x, y besitzt.

Ergebnis: 25

Lösungsweg: Die Gleichung kann als quadratische Gleichung in n gesehen werden. Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$n=\frac{(x^2+y^2)\big(x+\sqrt{x^2+y^2}\big)}{y^2}$$

(die andere Lösung würde zu einem negativen n führen, da $\sqrt{x^2+y^2}>x$), oder

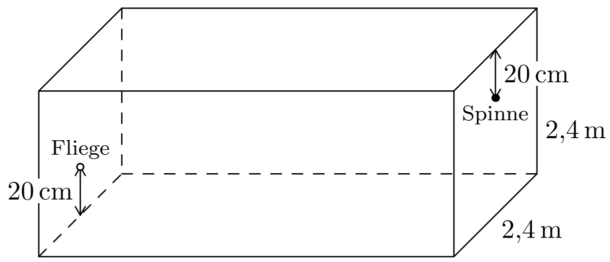
$$ny^2=(x^2+y^2)\big(x+\sqrt{x^2+y^2}\big).$$

Sei $d=\mathrm{ggT}(x,y)$ und seien $x=x_0d$, $y=y_0d$. Einsetzen und Vereinfachen führt zu

$$ny_0^2=d(x_0^2+y_0^2)\left(x_0+\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right).$$

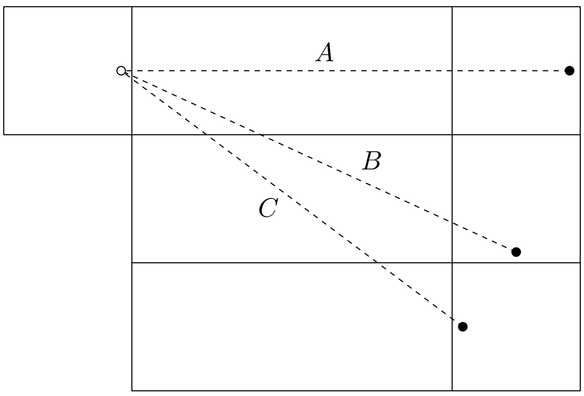
Da x_0 und y_0 teilerfremd sind, sind auch y_0^2 und $x_0^2+y_0^2$ teilerfremd und es folgt $(x_0^2+y_0^2)\mid n$. Durch das Vorkommen von $\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ folgt, dass $x_0^2+y_0^2$ eine Quadratzahl sein muss. Bekanntlich ist $5^2=25$ die kleinste Quadratzahl, die als Summe zweier positiver Quadratzahlen geschrieben werden kann, nämlich als 3^2+4^2. Daher muss $n\geq 25$ sein. Setzt man $x=4$ und $y=3$ ein, so sieht man, dass $n=25$ tatsächlich eine Lösung ist.

Aufgabe 42. In einem rechteckigen Raum mit den Abmessungen $6\,\mathrm{m}\times 2{,}4\,\mathrm{m}\times 2{,}4\,\mathrm{m}$ (Länge × Breite × Höhe), sitzt eine Spinne auf einer $2{,}4\,\mathrm{m}\times 2{,}4\,\mathrm{m}$ großen Wand $20\,\mathrm{cm}$ von der Decke entfernt und mit gleichem Abstand zu den vertikalen Kanten. Eine Fliege, die auf der gegenüber liegenden Wand sitzt, befindet sich auch auf der vertikalen Symmetrieachse, aber $20\,\mathrm{cm}$ vom Boden entfernt. Angenommen die Fliege bewegt sich nicht und die Spinne möchte die Fliege fangen. Wie lang ist der kürzeste Weg in Metern, den die Spinne zurücklegt, wenn sie sich nur entlang der Mauern fortbewegt?



Ergebnis: 8

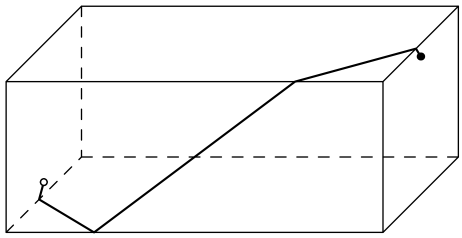
Lösungsweg: Es werden die möglichen Wege der Spinne auf dem Netz des Quaders untersucht. Es ist klar, dass der kürzeste Weg eine Gerade sein muss, wenn man das Netz des Quaders betrachtet. Der weiße Kreis stellt die Fliege dar und der schwarze Kreis die Spinne, deren Stelle auf der Ebene abhängig von der Wahl des Quadernetzes ist.



Es gibt bis auf Symmetrie drei mögliche Wege für die Spinne, um die Fliege zu erreichen. Sie kann entweder eine, zwei oder drei lange Flächen des Quaders queren; die Wege sind mit A, B und C beschriftet. Es ist klar, dass ein Weg, der vier dieser Seiten quert, auf einen dieser kürzeren zurückgeführt werden kann. Die Länge von A beträgt $8{,}4\,\mathrm{m}$. Die

Länge von Weg B bzw. von Weg C wird mithilfe des Satzes von Pythagoras berechnet und ist $\sqrt{66,32}$ Meter bzw. 8 Meter lang. Daher ist Weg C der kürzeste.

Die folgende Abbildung zeigt den kürzesten Weg dreidimensional:



Aufgabe 43. Ermittle das Minimum von

$$(6 + 2\cos(x) - \cos(y))^2 + (8 + 2\sin(x) - \sin(y))^2$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$.

Ergebnis: 49

Lösungsweg: Erinnern wir uns an die Parametrisierung eines Kreises mit Mittelpunkt (C_1, C_2) und Radius $R > 0$: Alle Punkte (x_1, x_2) des Kreises können mithilfe des Winkels α in der Form $(x_1, x_2) = (C_1 + R\cos(\alpha), C_2 + R\sin(\alpha))$ dargestellt werden.

Setze $V(x, y) = (6 + 2\cos(x) - \cos(y))^2 + (8 + 2\sin(x) - \sin(y))^2$. Betrachtet man nun die Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten $(0, 0)$ bzw. $(6, 8)$ und den Radien 1 bzw. 2 in ihrer Parametrisierung mithilfe des Winkels x bzw. y, dann folgt aus dem Satz des Pythagoras

$$V(x, y) = \overline{AB}^2,$$

wobei A ein Punkt auf k_1 und B ein Punkt auf k_2 ist. Demnach ist das Minimum von $V(x, y)$ das Quadrat der Entfernung der nächstgelegenen Punkte auf k_1 und k_2. Diese Entfernung wird über die Radien sowie den Abstand der Mittelpunkte der Kreise berechnet als $\sqrt{6^2 + 8^2} - 1 - 2 = 7$. Das Minimum von $V(x, y)$ ist daher $7^2 = 49$.

Aufgabe 44. Wie lautet die kleinste positive ganze Zahl, so dass ihre letzte Ziffer (d.h. Einerziffer) 2 ist und das Doppelte der ursprünglichen Zahl herauskommt, wenn man diese letzte Ziffer vor die erste Ziffer wandern lässt?

Ergebnis: 105 263 157 894 736 842

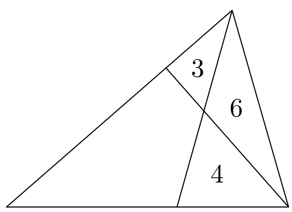
Lösungsweg: Sei N die gesuchte Zahl. Wenn man die Einerziffer entfernt, erhält man alle Ziffern von $2N$ außer der ganz linken. Da N mit 2 endet, muss $2N$ mit 4 enden. Daher ist die Zehnerziffer von N gleich 4. Sei d_i die i-te Ziffer von N, diesmal von rechts nach links gezählt, d.h. d_1 ist die Einerziffer. Berücksichtigt man, wie die Multiplikation mit 2 ziffernweise funktioniert, so sieht man, dass die Ziffern von N folgende Bedingung erfüllen müssen:

$$d_i = \begin{cases} 2d_{i-1} \bmod 10 & \text{falls } d_{i-2} < 5, \\ 2d_{i-1} \bmod 10 + 1 & \text{falls } d_{i-2} \geq 5 \end{cases}$$

für alle $i > 2$. Auf diese Weise kann man die Ziffern von N direkt aufschreiben. Man hört auf, wenn man die Ziffer 1 und im nächsten Schritt die Ziffer 2 erhält. Die mit 1 beginnende Zahl ist N, weil die Multiplikation mit 2 genau die letzte Ziffer entfernt, dafür aber die 2 vor die Zahl stellt. Das Ergebnis lautet somit

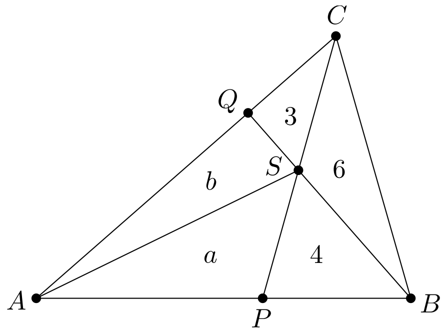
$$N = 105\,263\,157\,894\,736\,842.$$

Aufgabe 45. Mutter Margit teilt ihr dreieckförmiges Grundstück mit zwei geraden Linien in vier Teile und gibt den Teil mit der Größe 6 ihrer Tochter Manuela, den Teil mit der Größe 4 ihrer Tochter Sandra und den kleinsten Teil mit der Größe 3 ihrer jüngsten Tochter Nina. Den größten Teil behält sie sich selbst. Wie groß ist dieser Teil des Grundstücks?



Ergebnis: 19/2

Lösungsweg: Die Bezeichnungen werden wie in der Abbildung gewählt.



Aufgrund der gegebenen Flächenverhältnisse teilt S die Strecke QB im Verhältnis $1:2$ und die Strecke PC im Verhältnis $2:3$. Bezeichnet man den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle APS$ mit a und den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ASQ$ mit b, so kann man folgende Gleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned}\frac{b}{a+4} &= \frac{1}{2}\\ \frac{b+3}{a} &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Diese sind äquivalent zu den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}2b &= a+4\\ 2b+6 &= 3a,\end{aligned}$$

welche die Lösungen $a = 5$ und $b = 9/2$ besitzen. Also hat der gesuchte Flächeninhalt des Vierecks $APSQ$ die Größe $19/2$.

Aufgabe 46. Vier Brüder besitzen zusammen 2018 Euro. Man weiß, dass das Vermögen eines jeden von ihnen eine positive ganze Zahl ist, dass keine zwei die gleiche Summe an Geld besitzen und dass das Vermögen des reicheren Bruders ein ganzzahliges Vielfaches des Vermögens des ärmeren ist, wenn ein Bruder reicher als ein anderer ist. Wie groß ist die kleinste Anzahl an Euro, die der reichste Bruder haben kann?

Ergebnis: 1152

Lösungsweg: Da das Vermögen jedes Bruders ein Vielfaches des Vermögens des ärmsten ist, muss die Summe 2018 ebenfalls durch diese Zahl teilbar sein. Die Primfaktorzerlegung $2018 = 2 \cdot 1009$ ergibt nur drei Möglichkeiten für den ärmsten Bruder, nämlich 1, 2 oder 1009 Euro zu besitzen. Natürlich ist 1009 unmöglich, da dies größer wäre als jeder der verbleibenden drei Beträge. Wenn es nur 1 wäre, dann würden die restlichen Brüder gemeinsam 2017 Euro haben. Das ist jedoch eine Primzahl und daher hätte der zweitärmste Bruder ebenfalls 1 Euro gehabt – ein Widerspruch. Deshalb hat der ärmste Bruder 2 Euro und die restlichen drei Brüder haben gemeinsam 2016 Euro.

Sei $a < b < c$ das Vermögen der drei Brüder. Diese unterliegen den Bedingungen $a \mid b \mid c$ und $a + b + c = 2016$. Die Teilbarkeit zusammen mit echter Ungleichheit impliziert $2a \le b$ und $2b \le c$. Wenn man hier Gleichheit erhalten könnte, würde man eine Lösung mit dem kleinsten Wert von c bekommen. Glücklicherweise teilt $1 + 2 + 4 = 7$ die Zahl 2016. Daher können wir diese tatsächlich aufteilen als

$$2016 = \tfrac{1}{7} \cdot 2016 + \tfrac{2}{7} \cdot 2016 + \tfrac{4}{7} \cdot 2016$$

und die Antwort lautet $\frac{4}{7} \cdot 2016 = 1152$.

Aufgabe 47. Maxi zeichnete das Symbol ♣ auf die Tafel. Dann wiederholte er 13 Mal den folgenden Vorgang: Er löschte die Tafel und schrieb eine neue Folge von Symbolen. Dabei verwendete er das Paar ♡♣ anstelle von jedem ♣ und ♣♡ anstelle von jedem ♡ in der ursprünglichen Folge. Beispielsweise würde Maxi die Folge ♣♡♡ durch ♡♣♣♡♣♡ ersetzen. Wie viele Paare ♡♡ (mit keinem anderen Symbol dazwischen) stehen auf der Tafel, nachdem Maxi seine Aufgabe beendet hat?

Hinweis: Die gezählten Paare können sich überschneiden, zum Beispiel gibt es in der Folge ♡♡♡♡ drei ♡♡ Paare.

Ergebnis: 1365

Lösungsweg: Sei $A_0 = \clubsuit$ und A_n das Folgenglied auf der Tafel, nachdem Maxi den Ersetzungsvorgang n Mal durchgeführt hat, und sei h_n die Anzahl der Paare ♡♡ in A_n. Da jedes Paar ♡♡ in A_n nur aus dem Paar ♡♣ in A_{n-1} entsteht, welches seinerseits entweder aus ♡♡ oder aus ♣ in A_{n-2} entstehen kann, folgt $h_n = h_{n-2} + 2^{n-3}$ für $n \ge 3$, weil es genau 2^{n-3} Symbole ♣ in A_{n-2} gibt. Wegen $h_1 = 0$ ergibt sich für ungerade n nun

$$h_n = 2^{n-3} + 2^{n-5} + \cdots + 2^0 + h_1 = \tfrac{1}{3}(2^{n-1} - 1)$$

und das gewünschte Ergebnis lautet $h_{13} = 1365$.

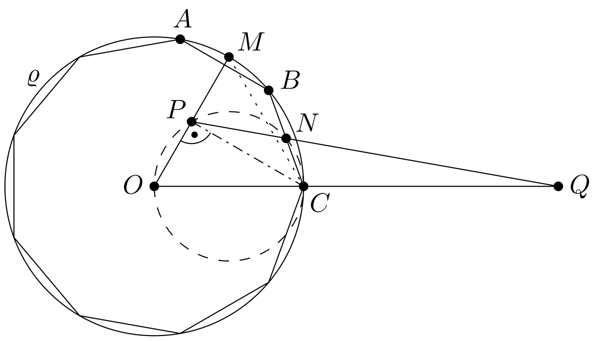
Aufgabe 48. Sei $ABCDEFGHI$ ein regelmäßiges Neuneck mit Umkreis ϱ und Mittelpunkt O. Sei M der Mittelpunkt des kürzeren Kreisbogens AB von ϱ, sei P der Mittelpunkt von MO und N der Mittelpunkt von BC. Die Geraden OC und PN schneiden sich in Q. Wie groß ist der Winkel $\angle NQC$ in Grad?

Ergebnis: $10°$

Lösungsweg: Zunächst wird gezeigt, dass es sich bei dem Viereck $OCNP$ um ein Sehnenviereck handelt. Klarerweise gilt $\angle ONC = 90°$. Um $\angle OPC = 90°$ zu zeigen, kann man wie folgt vorgehen: Da die Punkte C und M auf dem Kreis um O liegen, gilt $\overline{OC} = \overline{OM}$. Aus einfachen Betrachtungen in der gegebenen Situation folgt $\angle COM = 60°$. Somit ist das Dreieck $\triangle OCM$ gleichseitig. Da P der Mittelpunkt von OM ist, gilt $\angle OPC = 90°$.

Eine weitere einfache Berechnung im regelmäßigen Neuneck liefert $\angle NCO = 70°$. Somit ergibt sich $\angle OPN = 180° - \angle NCO = 110°$. Über die Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle OQP$ erhält man schießlich

$$\angle NQC = \angle PQO = 180° - \angle QOP - \angle OPQ = 10°.$$



Aufgabe 49. Anna wählte ein Tripel (x, y, z) von positiven ganzen Zahlen mit $x + y + z = 2018$ aus und teilte Xena die Zahl x, Yena die Zahl y und Zena die Zahl z mit. Keine der drei kannte die jeweils anderen beiden Zahlen, aber die Summe der drei Zahlen wurde ihnen mitgeteilt. Daraufhin entstand das folgende Gespräch:

- Xena: „Ich weiß, dass Yena und Zena unterschiedliche Zahlen haben.“
- Yena: „Dank Xena weiß ich jetzt, dass wir alle drei verschiedene Zahlen haben!“
- Zena: „Jetzt kann ich endlich sagen, wem welche Zahl mitgeteilt wurde.“

Bestimme das Tripel (x, y, z).

Ergebnis: $(3, 2, 2013)$

Lösungsweg: Xenas Aussage bedeutet nur, dass x ungerade ist. Wenn x gerade wäre, könnten nämlich y und z gleich sein.

Angenommen y ist ungerade. In diesem Fall wusste Yena von Anfang an, dass x und z unterschiedlich sind. Im Bereich $y \geq 1009$ hätte Yena bereits gewusst, dass x und z von y verschieden sind, und hätte daher Xenas Aussage nicht benötigt. Falls $y \leq 1007$ gelten würde, dann könnte Yena trotz Xenas Aussage nicht sagen, ob ihre Zahl sich von x unterscheidet. Wir schließen daraus, dass y gerade und folglich z ungerade sein muss.

Wenn y ein Vielfaches von 4 wäre, dann würde $x + z = 2018 - y \equiv 2 \bmod 4$ gelten, was bedeutet, dass $x + z$ das Doppelte einer ungeraden Zahl sein kann. Deshalb könnte Yena in diesem Fall nicht schließen, dass x und z verschieden sind. Wenn jedoch $y \equiv 2 \bmod 4$ gilt, dann müssen x und z unterschiedliche Reste modulo 4 haben und Yenas Aussage ist berechtigt.

Zena muss aufgrund ihrer Aussage auf $y = 2$ schließen können, denn andernfalls könnte y um 4 verkleinert und x um 4 vergrößert werden und Zena könnte den Unterschied nicht erkennen. Aus ähnlichen Gründen gilt $x \leq 4$. Daher ist entweder $x = 1$ oder $x = 3$. Im Fall $x = 1$ hätte Zena jedoch alleine mit dem Wissen $2018 - z = x + y = 3$ und Xenas Aussage die Werte von x und y ermitteln können, ohne Yenas Aussage gebrauchen zu müssen. Also muss $x = 3$ gelten und es ergibt sich abschließend $z = 2013$.

Aufgabe 50. Die Zauberer Arithmetix und Combinatorica liefern sich ein Duell. Beide Zauberer haben 100 Lebenspunkte (LP). Der Zauberspruch von Arithmetix wirkt bei Combinatorica mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% und führt zum Verlust von 60 LP, falls er erfolgreich ist. Der Zauberspruch von Combinatorica wirkt bei Arithmetix mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% und führt zum Verlust von 130 LP. Die Zauberer wechseln sich mit ihren Zaubersprüchen immer ab, Arithmetix beginnt. Das Duell endet, sobald ein Zauberer keine Lebenspunkte mehr hat, der andere Zauberer hat dann gewonnen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass Arithmetix das Duell gewinnt.

Ergebnis: $45/128$

Lösungsweg: Die exakte Anzahl an LP ist nicht wichtig – es ist ausreichend zu wissen, dass Arithmetix verliert, nachdem er ein Mal, und Combinatorica verliert, nachdem sie zwei Mal vom gegnerischen Zauberspruch getroffen wurde.

Angenommen wir befinden uns in einer Situation im Duell, in der Combinatorica schon einen Schlag abbekommen hat und Arithmetix mit seinem Zauberspruch an der Reihe ist. Sei q die Wahrscheinlichkeit, dass Arithmetix in dieser Situation gewinnt. Es gibt zwei Wege, wie Arithmetix hier gewinnen kann: Die erste Möglichkeit ist, dass sein Zauberspruch wirkt, was mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 eintrifft. Die zweite Möglichkeit ist, dass sowohl sein Zauberspruch als auch der nächste von Combinatorica nicht wirkt, was mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}1 \cdot 0{,}4$ eintritt, und anschließend Arithmetix mit der Wahrscheinlichkeit q gewinnt. Daraus erhält man die Gleichung

$$q = 0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}4 \cdot q$$

und durch Umformung $q = 15/16$.

Nun wird die Wahrscheinlichkeit p berechnet, dass Arithmetix das Duell gewinnt. Falls der Zauberspruch von Arithmetix wirkt und der von Combinatorica nicht, was mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}9 \cdot 0{,}4$ eintritt, dann ist das Duell in der oben beschriebenen Situation und Arithmetix gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit $q = 15/16$. Falls aber der Zauberspruch von Arithmetix nicht wirkt und der Zauberspruch von Combinatorica auch nicht, was mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}1 \cdot 0{,}4$ geschieht, dann kann Arithmetix wieder mit der Wahrscheinlichkeit p gewinnen. Somit ergibt sich die Gleichung

$$p = 0{,}9 \cdot 0{,}4 \cdot \frac{15}{16} + 0{,}1 \cdot 0{,}4 \cdot p$$

und man erhält als Lösung $p = 45/128$. Die Wahrscheinlichkeit, dass Arithmetix das Duell gewinnt, beträgt also 45/128.

Aufgabe 51. Sei $a(1), a(2), \ldots, a(n), \ldots$ eine wachsende Folge von positiven ganzen Zahlen mit $a(a(n)) = 3n$ für alle positiven ganzen Zahlen n. Berechne $a(2018)$.

Hinweis: Eine Folge ist *wachsend*, falls $a(m) < a(n)$ für alle $m < n$ gilt.

Ergebnis: 3867

Lösungsweg: Es gilt $a(1) > 1$, denn $a(1) = 1$ impliziert $1 = a(a(1)) \neq 3 \cdot 1$, was aber die Bildungsvorschrift der Folge verletzt. Da die Folge wachsend ist, folgt $1 < a(1) < a(a(1)) = 3$ und daraus $a(1) = 2$.

Aus der Rekursionsgleichung ergibt sich sofort $a(3n) = a(a(a(n))) = 3a(n)$ für alle n. Beginnend mit $a(1) = 2$ zeigt man mit vollständiger Induktion nach m, dass $a(3^m) = 2 \cdot 3^m$ gilt. Daraus erhält man $a(2 \cdot 3^m) = a(a(3^m)) = 3^{m+1}$.

Es gibt $3^n - 1$ ganze Zahlen i mit der Eigenschaft $3^n < i < 2 \cdot 3^n$ und es gibt $3^n - 1$ ganze Zahlen j mit $a(3^n) = 2 \cdot 3^n < j < 3^{n+1} = a(2 \cdot 3^n)$. Da die Folge $a(n)$ wachsend ist, gibt es keine andere Möglichkeit, als dass $a(3^n + b) = 2 \cdot 3^n + b$ für alle $0 < b < 3^n$ sein muss. Folglich gilt

$$a(2 \cdot 3^n + b) = a(a(3^n + b)) = 3^{n+1} + 3b \quad \text{für alle} \quad 0 < b < 3^n.$$

Aus $2018 = 2 \cdot 3^6 + 560$ ergibt sich schließlich $a(2018) = 3^7 + 3 \cdot 560 = 3867$.

Aufgabe 52. Ein gleichseitiges Dreieck T mit der Seitenlänge 2018 wird in 2018^2 kleine gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge 1 zerlegt. Wir nennen eine Menge M von Ecken dieser kleinen Dreiecke *unabhängig*, falls für zwei verschiedene Punkte $A, B \in M$ die Strecke AB nicht parallel zu irgendeiner Seite von T ist. Was ist die größte Anzahl an Elementen, die eine unabhängige Menge haben kann?

Ergebnis: 1346

Lösungsweg: Jeder Ecke auf dem Gitter kann ihr Abstand zu den drei Seiten von T zugeordnet werden. Dabei wählt man als Einheit die Höhe eines kleinen gleichseitigen Dreiecks. Es ist leicht zu sehen, dass sich für jede Ecke diese drei Abstände zu 2018 addieren. Hat man andererseits ein Tripel aus nicht-negativen ganzen Zahlen, die sich zu 2018 aufsummieren, dann gibt es eine eindeutig bestimmte Ecke im Gitter, welche die Einträge aus dem Tripel als Abstände zu den Seiten von T besitzt. Diese Zahlentripel zu betrachten ist deshalb äquivalent dazu, die Ecken zu betrachten. Im Folgenden werden die Tripel betrachtet und deren Einträge als *Koordinaten* bezeichnet.

Die Bedingung für eine unabhängige Menge ist, dass keine zwei Tripel in der Menge dieselbe erste, zweite oder dritte Koordinate haben. Sei

$$M = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_k, y_k, z_k)\}$$

eine unabhängige Menge. Da die Zahlen $x_1, \ldots, x_k$ verschiedene nicht-negative ganze Zahlen sind, beträgt deren Summe mindestens

$$0 + 1 + \cdots + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2}.$$

Dasselbe gilt auch für die Summen $y_1 + \cdots + y_k$ und $z_1 + \cdots + z_k$. Wegen der Bedingung $x_i + y_i + z_i = 2018$ für alle $i = 1, \ldots, k$ ergibt sich somit die Abschätzung

$$3 \cdot \frac{k(k-1)}{2} \leq (x_1 + \cdots + x_k) + (y_1 + \cdots + y_k) + (z_1 + \cdots + z_k) = 2018k.$$

Daraus erhält man

$$k \leq 1 + \frac{2}{3} \cdot 2018$$

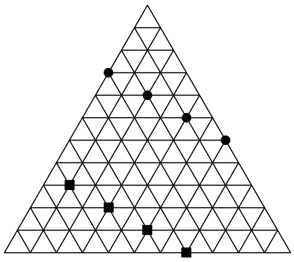
und schließlich $k \leq 1346$.

Dass das Maximum für k wirklich angenommen werden kann, zeigt das Beispiel hier: Die beiden Folgen von Punkten

$$\begin{aligned} & (0,672,1346),\ (2,671,1345),\ (4,670,1344),\ \ldots,\ (1344,0,674); \\ \text{und} \quad & (1,1345,672),\ (3,1344,671),\ (5,1343,670),\ \ldots,\ (1345,673,0) \end{aligned}$$

bilden zusammen eine unabhängige Menge mit 1346 Elementen. Folglich lautet die Antwort 1346.

Die folgende Grafik zeigt eine Konstruktion einer unabhängigen Menge für ein Dreieck mit Seitenlänge 11:



Aufgabe 53. Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$ mit $\overline{AB} = 5$, $\overline{AC} = 6$ und dem Umkreis ω. Ferner seien F und G zwei Punkte auf der Seite AC mit $\overline{AF} = 1$, $\overline{FG} = 3$ und $\overline{GC} = 2$. Die von B verschiedenen Schnittpunkte der Geraden BF bzw. BG mit dem Umkreis ω seien mit D bzw. E bezeichnet. Zusätzlich sollen AC und DE parallel sein. Wie lang ist die Seite BC?

Ergebnis: $5\sqrt{5/2}$

Lösungsweg: Setze $x = \overline{BC}$. Da $ACED$ ein gleichschenkliges Trapez ist, sind seine Diagonalen gleich lang. Setze also $y = \overline{AE} = \overline{CD}$ sowie außerdem $p = \overline{BF}$, $q = \overline{DF}$, $u = \overline{BG}$ und $v = \overline{GE}$.

Die Winkel $\angle BAC$ und $\angle BDC$ sind Peripheriewinkel über der Sehne BC und deshalb gleich groß. Folglich sind die Dreiecke $\triangle BFA$ und $\triangle FCD$ ähnlich, woraus

$$\frac{y}{5} = \frac{q}{1} = \frac{5}{p}$$

folgt. Auf analoge Weise sind auch die Dreiecke $\triangle BCG$ und $\triangle AGE$ ähnlich, weshalb

$$\frac{y}{x} = \frac{v}{2} = \frac{4}{u}$$

gilt. Schließlich erhält man aus der Parallelität von AC und DE die Gleichung

$$\frac{p}{q} = \frac{u}{v}. \tag{$*$}$$

Setzt man nun die aus den obigen Beziehungen gewonnenen Ausdrücke

$$p = \frac{25}{y}, \quad q = \frac{y}{5}, \quad u = \frac{4x}{y} \quad \text{und} \quad v = \frac{2y}{x}$$

in Gleichung $(*)$ ein, so ergibt sich

$$\frac{25}{y} : \frac{y}{5} = \frac{4x}{y} : \frac{2y}{x}$$

bzw. $x^2 = 125/2$. Daraus erhält man $x = 5\sqrt{5/2}$, was die gesuchte Länge der Seite BC ist.

Aufgabe 54. Es ist

$$2^{22000} = \underbrace{4569878\ldots229376}_{6623 \text{ Ziffern}}.$$

Wie viele positive ganze Zahlen $n < 22000$ gibt es, bei denen die erste Ziffer der Zahl 2^n auch gleich 4 ist?

Ergebnis: 2132

Lösungsweg: Ist z die erste Ziffer einer d-stelligen Zahl N, dann gilt $z10^{d-1} \leq N < (z+1)10^{d-1}$. Für das Doppelte der Zahl N bedeutet dies $2z10^{d-1} \leq 2N < (2z+2)10^{d-1}$. Also ist die erste Ziffer von $2N$ mindestens so groß wie die erste Ziffer von $2z$ und höchstens so groß wie die erste Ziffer von $2z+1$. Dieses Wissen wird nun auf die erste Ziffer von Zweierpotenzen angewendet: Hat man eine Zweierpotenz mit erster Ziffer 1, so gibt es fünf Möglichkeiten für die ersten Ziffern der jeweils folgenden Zweierpotenzen:

$$\begin{array}{ll} (1) & 1,2,4,8,1 \\ (2) & 1,2,4,9,1 \\ (3) & 1,2,5,1 \\ (4) & 1,3,6,1 \\ (5) & 1,3,7,1 \end{array}$$

Sei k eine nicht-negative ganze Zahl, sodass 2^k mit 1 beginnt und d Ziffern hat. Dann gibt es eine einzige Zweierpotenz, die mit 1 beginnt und $d+1$ Ziffern hat. Diese ist 2^{k+3}, falls eine der obigen Situationen (3), (4) oder (5) vorliegt, bzw. 2^{k+4} in den Fällen (1) und (2). Weil sowohl die 1-stellige Zahl 2^0 als auch die 6623-stellige Zahl 2^{21998} mit 1 beginnen, kann ermittelt werden, wie oft die Fälle (1) und (2) bei der schrittweisen Berechnung der Zweierpotenzen vorkommen, nämlich $21998 - 3 \cdot 6622 = 2132$ Mal.

Da mit der Ziffer 4 startende Zweierpotenzen genau aus den Fällen (1) und (2) entstehen, gibt es folglich 2132 Zahlen mit der gewünschten Eigenschaft.

Aufgabe 55. Finde rationale Zahlen a, b und c, welche die Gleichung

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$$

erfüllen.

Ergebnis: $(1/9, -2/9, 4/9)$ oder Permutationen davon

Lösungsweg: Setze $x = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}$ und $y = \sqrt[3]{2}$. Die Idee dahinter ist folgende: Die Zahlen $y^3 \pm 1$ sind ganze Zahlen. Man kann dann die Faktorisierungsformel $A^3 \pm B^3$ anwenden und damit eine Beziehung zwischen x und y herstellen, die geeignet ist, x als Summe von drei Kubikwurzeln aus rationalen Zahlen auszudrücken.

Wegen

$$1 = y^3 - 1 = (y-1)(y^2+y+1)$$

und $3 = y^3 + 1$ gilt

$$y^2 + y + 1 = \frac{3y^2+3y+3}{3} = \frac{y^3+3y^2+3y+1}{3} = \frac{(y+1)^3}{3}.$$

Somit ergibt sich

$$x^3 = y - 1 = \frac{1}{y^2+y+1} = \frac{3}{(y+1)^3}.$$

Aus $3 = y^3 + 1 = (y+1)(y^2-y+1)$ folgt

$$\frac{1}{y+1} = \frac{y^2-y+1}{3}$$

und schließlich

$$x = \frac{\sqrt[3]{3}}{y+1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1).$$

Es wurde also gezeigt, dass das Tripel $(a,b,c) = (\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{1}{9})$ eine Lösung ist.

Man kann zeigen, dass die Darstellung von x als Summe von drei Kubikwurzeln aus rationalen Zahlen bis auf die Reihenfolge eindeutig ist.