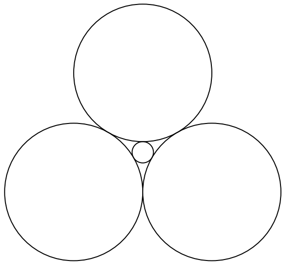
Lösungen – Klasse 12

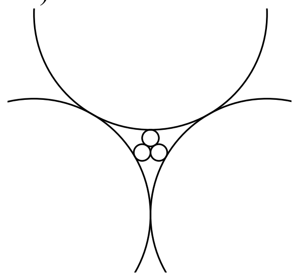
1. Jemand hat einige Kreisscheiben auf einen Tisch gelegt. Jede Kreisscheibe berührt genau drei andere Kreisscheiben. Wie viele Kreisscheiben können insgesamt auf dem Tisch liegen?

(A) *4* **(B)** *5* **(C)** *6* **(D)** *7* **(E)** *8*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **4** und **6** Lösungen sind. Dazu geben wir jeweils ein Beispiel an (siehe *Figur 1* und *Figur 2*).

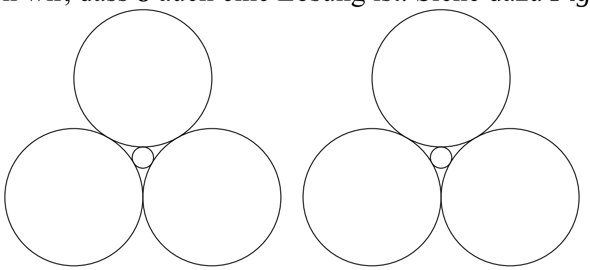


Figur 1



Figur 2

In **Teil 2** zeigen wir, dass **8** auch eine Lösung ist. Siehe dazu *Figur 3*.



Figur 3

In **Teil 3** zeigen wir, dass 5 <u>keine</u> Lösung ist. Tatsächlich: Wenn es genau 5 Kreisscheiben gäbe und jede genau drei berührte, dann gäbe es $5 \cdot 3 = 15$ Berührpunkte. Da jeder Berührpunkt auf genau zwei Kreisen liegt, werden sie doppelt gezählt. Um das richtige Ergebnis zu erhalten, müssten wir 15 noch durch 2 teilen: $\frac{15}{2}$ = 7,5. Dies geht <u>nicht</u>, da die Anzahl der Berührpunkte ganzzahlig sein muss. Damit ist bewiesen, dass 5 <u>keine</u> Lösung ist.
<u>Beachte</u>: Ähnlich lässt sich zeigen, dass 7 ebenfalls <u>keine</u> Lösung ist.
<u>Anregung</u>: Der geneigte Leser möge dies wie in Teil 3 prüfen.
<u>Bemerkung</u>: Es lässt sich zeigen, dass <u>keine</u> ungerade Zahl eine Lösung ist.

Die richtige(n) Antwort(en): A, C, E

2. Die Anzahl der positiven Teiler einer natürlichen Zahl *n* sei *d(n)*. Welche der aufgezählten Aussagen trifft zu?
Bemerkung: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$. Beispiel: $6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6$.

(A) $d(3!)=2^2$ **(B)** $d(4!)=2^3$ **(C)** $d(5!)=2^4$ **(D)** $d(6!)=2^5$ **(E)** $d(7!)=2^6$

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass (**A**), (**B**) und (**C**) Lösungen sind.
(**A**): $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$. Die natürlichen Teiler von 6 sind 1, 2, 3 und 6, insgesamt also 4 Teiler. $2^2 = 4$, es stimmt also.
(**B**): $4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$. Die natürlichen Teiler von 24 sind 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 und 24, insgesamt also 8 Teiler. $2^3 = 8$, es stimmt also.
(**C**): $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$. Die natürlichen Teiler von 120 sind 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120, insgesamt 16 Teiler. $2^4 = 16$, es stimmt also.
In **Teil 2** zeigen wir, dass (D) und (E) keine Lösungen sind.
(D): $6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$. Die natürlichen Teiler von 720 sind 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 48, 60, 72, 80, 90, 120, 144, 240, 360, 720 insgesamt 30 Teiler. $2^5 = 32$, es stimmt also nicht.
(E): $7! = 5040$, $d(7!) = 60$, aber $2^7 = 128$: 60 und 128 stimmen nicht überein.
Anregung: Der geneigte Leser möge prüfen, dass $d(7!) = 60$.
Bemerkung: Wir zeigen an einem Beispiel eine Regel, wie man die Anzahl der Teiler mit Hilfe der Hochzahlen aus der Primfaktordarstellung ermitteln kann. $120 = 2^3\cdot 3^1\cdot 5^1$. Die Anzahl der Teiler ist $(3 + 1)\cdot(1 + 1)\cdot(1 + 1) = 16$.

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C

3. Bea berechnet die Quersumme einer Quadratzahl. Welches Ergebnis kann sie erhalten?
1. Bemerkung: Quadratzahlen sind die Zahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36... usw.
2. Bemerkung: Die Quersumme einer Zahl ist die Summe ihrer Ziffern.

(A) *15* **(B)** *16* **(C)** *17* **(D)** *18* **(E)** *19*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **16**, **18** und **19** Lösungen darstellen. Dazu geben wir jeweils ein Beispiel an. $13^2 = 169$ und $1 + 6 + 9 =$ **16**, $24^2 = 576$ und $5 + 7 + 6 =$ **18**, bzw. $17^2 = 289$ und $2 + 8 + 9 =$ **19**.
In **Teil 2** zeigen wir, dass 15 und 17 keine Lösungen sind. Im *1. Schritt* formulieren wir zunächst einige Feststellungen.
1. Feststellung: Eine Quadratzahl geteilt durch 9 kann nur die Reste 0, 1, 4 oder 7 ergeben. Als Begründung betrachten wir zunächst folgende Tabelle:

Rest bei *n* durch 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Rest bei n^2 durch 9	0	1	4	0	7	7	0	4	1

Warum das Ergebnis für alle natürlichen Zahlen gilt, erläutern wir am Beispiel $n = 104$. $104 = 11\cdot 9 + 5 \Rightarrow n^2 = (11\cdot 9 + 5)^2 = \mathit{11^2\cdot 9^2} + \mathit{2\cdot 5\cdot 11\cdot 9} + 5^2$.
Die *kursiven* Terme sind teilbar durch 9 und $5^2 = 25 = 2\cdot 9 + 7$.
2. Feststellung: Der Rest einer Zahl durch 9 und der Rest ihrer Quersumme

durch 9 sind gleich. Wir schildern dies für dreistellige Zahlen:

$\overline{abc} = 100a + 10b + c = 99a + 9b + a + b + c = 9\cdot(11a+b) + (a+b+c)$

$9\cdot(11a+b)$ ist durch 9 teilbar. Der Rest von $\overline{abc}$ muss also dem Rest von $(a+b+c)$ entsprechen, also dem Rest der Quersumme.

(Ein allgemeiner Beweis geht ähnlich.)

Im *2. Schritt* betrachten wir die Zahl 15 von (A). 15 geteilt durch 9 ergibt den Rest 6. Aus der 1. und 2. Feststellung folgt, dass 15 keine Lösung ist.

Im *3. Schritt* betrachten wir die Zahl 17 von (C). 17 geteilt durch 9 ergibt den Rest 8. Aus der 1. und 2. Feststellung folgt, dass 17 keine Lösung ist.

Bemerkung: Es lässt sich zeigen: Wenn eine natürliche Zahl *n* geteilt durch 9 den Rest 0, 1, 4 oder 7 ergibt, so ist *n* die Quersumme einer Quadratzahl.

Die richtige(n) Antwort(en): B, D, E

4. 1/3 der Einwohner einer Ortschaft sind Frauen, 2/3 sind Männer. Die Frauen kaufen jede Woche 4/5 des in der Ortschaft verkauften Kefirs. Durch statistische Erhebungen wurde genau ermittelt, wie viel Kefir Frauen und wie viel Kefir Männer wöchentlich im Schnitt kaufen. **Die Frage**: Das wievielfache des Durschnittwerts der Männer ergibt den Durschnittwert der Frauen?
Bemerkungen: Die Durchschnittswerte berechnet man, indem man die Gesamtzahl des wöchentlich von Frauen bzw. Männer gekauften Kefirs durch die Gesamtzahl der Frauen bzw. Männer teilt.

(A) *3-fache* **(B)** *4-fache* **(C)** *6-fache* **(D)** *8-fache* **(E)** $\frac{4}{15}$*-fache*

Lösung: Die Gesamteinwohnerzahl sei $3x$. Dann gibt es x Frauen und $2x$ Männer. Die wöchentlich gekauften Kefirs seien $5y$. Davon kaufen $4y$ die Frauen, y die Männer. Der Durschnittswert beträgt damit für Frauen $\frac{4y}{x}$, für Männer $\frac{y}{2x}$. Es gilt: $\frac{4y}{x} = \mathbf{8}\cdot\frac{y}{2x}$. Dies bedeutet: Es handelt sich um das **8-**fache.

Die richtige(n) Antwort(en): D

5. Wie viele ganze Lösungen hat die Ungleichung $x^2 < 1 - 2\sin(2x)$ insgesamt?
Bemerkung: x ist im Bogenmaß angegeben.

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *3* **(E)** *4*

Lösung: In **Teil 1** schränken wir die Anzahl der in Frage kommenden Lösungen ein.
1. Feststellung: $\sin(2x) \geq -1$, da der kleinste Wert einer Sinusfunktion -1 ist.
2. Feststellung: $1 - 2\sin(2x) \leq 3$. Denn: $1 - 2\sin(2x) \leq 3 \;\Leftrightarrow\; -2\sin(2x) \leq 2$

$\Leftrightarrow$ $\sin(2x) \geq -1$ und dies stimmt (siehe die 1. Feststellung).

3. Feststellung: $x^2 < 3$. Dies folgt aus der Ausgangsungleichung und aus der 2. Feststellung.

4. Feststellung: Die Ungleichung $x^2 < 3$ hat als ganze Lösungen –1, 0 und 1.

In **Teil 2** ermitteln wir die Lösungen. Unser Ansatz ist die 4. Feststellung.

Im *1. Schritt* zeigen wir, dass **0** eine Lösung ist: $0^2 < 1 - 2 \cdot \sin 0 \;\Leftrightarrow\; 0 < 1$.

Im *2. Schritt* zeigen wir, dass **–1** ebenfalls eine Lösung ist. Tatsächlich:

$(-1)^2 < 1 - 2 \cdot \sin(-2) \;\Leftrightarrow\; 1 < 1 - 2 \cdot \sin(-2) \;\Leftrightarrow\; -2 \cdot \sin(-2) > 0$. Die letzte Ungleichung stimmt, da $\sin(-2) < 0$.

Im *3. Schritt* zeigen wir, dass 1 keine Lösung darstellt. Tatsächlich:

$1^2 < 1 - 2\sin(2) \;\Leftrightarrow\; -2\sin(2) > 0$ stimmt nicht wegen $\sin(2) > 0$.

Die richtige(n) Antwort(en): C

6. Eine natürliche Zahl n heißt *Grundzahl*, wenn jede natürliche Zahl kleiner als n als Summe von Teilern von n dargestellt werden kann. Beispiel: 6 ist eine Grundzahl, denn $1 = 1$, $2 = 2$, $3 = 3$, $4 = 3 + 1$ und $5 = 3 + 2$.
Welche der folgenden Zahlen ist eine Grundzahl?
Bemerkung: In jeder der Summen darf jeder Teiler höchstens einmal vorkommen.

(A) *3* **(B)** *8* **(C)** *12* **(D)** *48* **(E)** *144*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass 3 keine Grundzahl ist. Begründung: Die Zahl 2 kann nicht als Summe von Teilern der Zahl 3 dargestellt werden.
Beachte: 2 = 1 + 1 geht nicht, denn der Teiler würde zweimal vorkommen.
In **Teil 2** zeigen wir, dass **8** eine Grundzahl ist. Mit den Teilern 1, 2 und 4 von 8 lassen sich die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7 wie verlangt darstellen: 1 = 1, 2 = 2, 3 = 1 + 2, 4 = 4, 5 = 1 + 4, 6 = 2 + 4 und 7 = 1 + 2 + 4.
In **Teil 3** zeigen wir, dass **12** eine Grundzahl ist. Mit den Teilern 1, 2 und 4 von 12 lassen sich die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 wie verlangt darstellen (siehe Teil 2). Unter Hinzunahme des Teilers 6 von 12 lassen sich auch die Zahlen 8, 9, 10 und 11 darstellen: 8 = 2 + 6, 9 = 1 + 2 + 6, 10 = 4 + 6, 11 = 1 + 4 + 6.
In **Teil 4** fomulieren wir eine Behauptung und schildern deren Beweis.
Behauptung: Das Produkt zweier (nicht unbedingt verschiedener) Grundzahlen ist ebenfalls eine Grundzahl.
Beweis: p und q seien zwei Grundzahlen und k eine natürliche Zahl kleiner als das Produkt pq: $0 < k < pq$. k kann so geschrieben werden: $k = aq + b$ (1)
(k wird durch q geteilt, Division mit Rest), wobei $0 \leq a < p$ und $0 \leq b < q$.

Da p und q Grundzahlen sind, folgt:
a ist eine Summe von Teilern von p (2)
b ist eine Summe von Teilern von q (3)
Aus (2) folgt (durch Multiplizieren mit q):
aq ist eine Summe von Teilern von pq (4)
Setzen wir nun (3) und (4) in (1) ein, erhalten wir k als Summe von Teilern

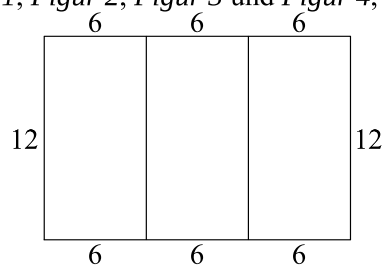
von pq.
Anregung: Der geneigte Leser möge einige Details des obigen Beweises prüfen.
In **Teil 5** zeigen wir, dass **48** und **144** Grundzahlen sind. Denn: $6 \cdot 8 = 48$ und $12 \cdot 12 = 144$. Wir haben gesehen: 6, 8 und 12 sind Grundzahlen. Aus der Behauptung von Teil 4 folgt, dass auch 48 und 144 Grundzahlen sind.

Die richtige(n) Antwort(en): B, C, D, E

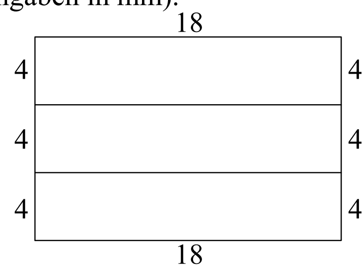
7. Ein 18 mm × 12 mm Rechteck wurde in drei Rechtecke zerlegt. Alle drei Rechtecke haben denselben Umfang. Wie viele mm lang kann ein solcher Umfang sein?

(A) *10* **(B)** *33* **(C)** *36* **(D)** *39* **(E)** *44*

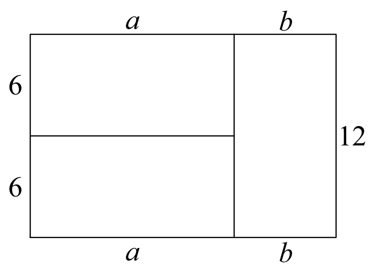
Lösung: In **Teil 1** formulieren wir einige Feststellungen. Die vier Eckpunkte des Ausgangsrechtecks sind nach der Zerlegung Eckpunkte der drei Rechtecke. Daraus folgt:
1. Feststellung: Es gibt zwei (benachbarte) Eckpunkte des Ausgangsrechtecks, die Eckpunkte eines der drei Rechtecke nach der Zerlegung sind.
Aus der 1. Feststellung folgt:
2. Feststellung: Bei der Zerlegung gibt es einen Schnitt, der parallel zu einer Seite des Ausgangsrechtecks verläuft und gleich lang mit dieser Seite ist.
Aus der 2. Feststellung folgt:
3. Feststellung: Der andere Schnitt (insgesamt gibt es genau zwei Schnitte) ist parallel oder senkrecht zum ersten Schnitt.
In **Teil 2** untersuchen wir, welche Art von Zerlegungen möglich sind. Unser Ansatz ist die 1. und die 2. Fesstellung. Es ergeben sich vier Fälle (siehe *Figur 1*, *Figur 2*, *Figur 3* und *Figur 4*, alle Angaben in mm).



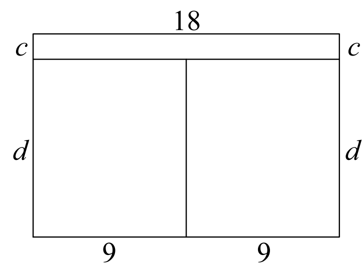
Figur 1



Figur 2



Figur 3



Figur 4

In **Teil 3** ermitteln wir die Umfänge. In *Figur 1* ist jeder Umfang **36** mm, in *Figur 2* ist jeder Umfang **44** mm.

In *Figur 3* gilt $a+b=18$ (*). Zwei Rechtecke haben den Umfang $2\cdot(6+a)$, das dritte Rechteck hat den Umfang $2\cdot(12+b)$. Aus der Bedingung folgt: $2\cdot(6+a)=2\cdot(12+b) \Leftrightarrow a=b+6$ (**). Mit (**) in (*) folgt b = 6 und somit ist a = 12. Die Umfänge sind $2\cdot(6+12)=2\cdot(12+6)=$ **36** mm.

In *Figur 4* gilt $c+d=12$ (*). Zwei Rechtecke haben den Umfang $2\cdot(9+d)$, das dritte Rechteck hat den Umfang $2\cdot(18+c)$. Aus der Bedingung folgt: $2\cdot(18+c)=2\cdot(9+d) \Leftrightarrow d=c+9$ (**). Mit (**) in (*) folgt c = 1,5 und somit ist d = 10,5. Die Umfänge sind $2\cdot(18+1{,}5)=2\cdot(9+10{,}5)=$ **39** mm.

Die richtige(n) Antwort(en): C, D, E

8. Für die reellen Zahlen x und y gilt $\frac{xy}{x^2+6y^2}=\frac{1}{5}$. Welche Werte kann der Term $\frac{xy}{x^2-6y^2}$ annehmen?

(A) *–2* **(B)** *–1* **(C)** *1* **(D)** *2* **(E)** *Keine dieser Antworten.*

Lösung: In **Teil 1** formen wir die Gleichung um.

$$\frac{xy}{x^2+6y^2}=\frac{1}{5} \Leftrightarrow 5xy=x^2+6y^2 \Leftrightarrow x^2-5xy+6y^2=0$$

In **Teil 2** betrachten wir die Gleichung $x^2-5xy+6y^2=0$ als quadratische Gleichung in x mit dem Parameter y. Wir lösen nun diese Gleichung.

$x_{1,2}=\frac{5y\pm\sqrt{25y^2-24y^2}}{2}=\frac{5y\pm y}{2}$, d. h. $x=2y$ oder $x=3y$.

In **Teil 3** ermitteln wir die gesuchten Werte.

Wenn $x=2y$, dann gilt $\frac{xy}{x^2-6y^2}=\frac{2y\cdot y}{4y^2-6y^2}=\frac{2y^2}{-2y^2}=\mathbf{-1}$.

Wenn $x=3y$, dann gilt $\frac{xy}{x^2-6y^2}=\frac{3y\cdot y}{9y^2-6y^2}=\frac{3y^2}{3y^2}=\mathbf{1}$.

Alternativlösung: $\frac{xy}{x^2+6y^2}=\frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{\frac{x}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+6}=\frac{1}{5}$ Mit $t=\frac{x}{y}$ folgt

$\frac{t}{t^2+6}=\frac{1}{5} \Leftrightarrow t^2-5t+6=0$ mit den Lösungen $t=2$ und $t=3$.

$\frac{xy}{x^2-6y^2}=\frac{\frac{x}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2-6}=\frac{t}{t^2-6}$ ergibt **–1** für t = 2 und **1** für t = 3.

Die richtige(n) Antwort(en): B, C

9. Die Städte A und B sind 130 km voneinander entfernt. Drei Personen wollen von A nach B gelangen. Sie haben nur einen Roller zur Verfügung, auf dem höchstens zwei Personen Platz haben. Der Roller fährt mit der Geschwindigkeit 50 km/h. Jede Person legt zu Fuß 5 km in der Stunde zurück. In wie vielen Stunden können alle drei Personen von A nach B kommen?
<u>Bemerkungen</u>: Die Städte A und B sind durch eine gerade Straße verbunden. Die drei Personen können frei darüber entscheiden, wer wann mit dem Roller fährt oder zu Fuß geht. Die Zeiten für die Beschleunigung auf 50 km/h, für Anhalten, Aufsteigen und Absteigen sind zu vernachlässigen.

(A) *5,8* **(B)** *6,2* **(C)** *6,5* **(D)** *6,8* **(E)** *7,2*

In **Teil 1** zeigen wir, dass **6,2** eine Lösung ist. Wir schildern die Schritte:
In einem *1. Schritt* fahren Person 1 und Person 2 mit dem Roller 2,2 Stunden lang von A nach B, wonach sie anhalten. Bis jetzt legen sie $2{,}2\cdot 50=110$ km zurück. Person 3 läuft in dieser Zeit zu Fuß von A aus und legt $2{,}2\cdot 5=11$ km zurück.
In einem *2. Schritt* fährt Person 1 zurück um Person 3 abzuholen. Sie sind $110-11=99$ km voneinander entfernt. Da sie sich aufeinander zubewegen, ergibt sich eine Gesamtgeschwindigkeit von $50+5=55$ km/h. Person 1 und Person 3 treffen sich daher nach weiteren $99:55=1{,}8$ Stunden. Beim Treffen sind sie $11+1{,}8\cdot 5=20$ km von A entfernt. Person 2 läuft in dieser Zeit zu Fuß nach B und legt weitere $1{,}8\cdot 5=9$ km zurück. Person 2 befindet sich jetzt von A 119 km entfernt.
In einem *3. Schritt* nimmt Person 1 Person 3 auf und sie fahren bis B. Da sie noch $130-20=110$ km zu bewältigen haben, dauert die Fahrt $110:50=2{,}2$ Stunden. In dieser Zeit legt Person 2 genau $2{,}2\cdot 5=11$ km zurück. Die drei Personen kommen daher gleichzeitig in B an.
Die Gesamtzeit beträgt $2{,}2+1{,}8+2{,}2=\mathbf{6{,}2}$ Stunden.
In **Teil 2** zeigen wir, dass **6,5**, **6,8** und **7,2** Stunden ebenfalls Lösungen sind. Tatsächlich, es reicht z. B, wenn in der Lösung aus Teil 1 eine Person, die zu Fuß unterwegs ist, eine Pause von 0,3 , 0,6 bzw. 1 Stunde macht.
In **Teil 3** zeigen wir, dass 5,8 <u>keine</u> Lösung ist.
<u>Behauptung</u>: In weniger als 6,2 Stunden ist die Aufgabe nicht lösbar.

Beweis: Um einen optimalen Wert zu erzielen, ist es erforderlich, dass der Roller die ganze Zeit in Bewegung ist *und* nur eine Person auf dem Roller sitzt, wenn dieser in Richtung A fährt (ansonsten zwei Personen).
Es sei nun x jene Gesamtzeit (in Stunden), während der Roller in Richtung B fährt und y jene Gesamtzeit (in Stunden), während der Roller in Richtung A fährt. Es gilt: $x = y + 2{,}6$ (wegen $130 : 50 = 2{,}6$, der Roller kommt am Ende in B an). Wir untersuchen die Summe der von den drei Personen insgesamt zurückgelegten Wege während der x Stunden. Zwei fahren mit dem Roller, einer geht zu Fuß. Somit erhalten wir mit Hilfe der Angaben $50x + 50x + 5x = 105x$ km. Nun untersuchen wir noch die Summe der von den drei Personen insgesamt zurückgelegten Wege während der y Stunden. Einer fährt mit dem Roller, zwei gehen zu Fuß. Somit erhalten wir $50y$ in Richtung A und $5y + 5y = 10y$ km in Richtung B. Wenn wir den Weg nach A mit einem negativen Vorzeichen versehen, erhalten wir insgesamt $-50y + 10y = -40y$. Außerdem wissen wir, dass jede Person 130 km in Richtung B zurücklegen muss, d.h. insgesamt $3 \cdot 130 = 390$ km. Aus $x = y + 2{,}6$ folgt $x + y = 2y + 2{,}6$. Dies beschreibt die Gesamtzeit der drei Personen. Der Gesamtweg ist $105x - 40y$, oder $105x - 40y =$ $= 105(y + 2{,}6) - 40y = 65y + 273$. Es muss gelten: $390 \le 65y + 273$ oder $117 \le 65y$, d. h. $y \ge 1{,}8$. Aus $x + y = 2y + 2{,}6$ folgt $x + y = 2y + 2{,}6 \ge$ $\ge 2 \cdot 1{,}8 + 2{,}6 = 6{,}2$. Damit ist bewiesen, dass die Gesamtzeit mindestens 6,2 Stunden betragen muss.

Bemerkung: Es ist auch anders als in Teil 1 beschrieben möglich, die 6,2 Stunden zu erreichen. Der geneigte Lösung möge selbst einen anderen „Fahrplan” aufstellen.

Die richtige(n) Antwort(en): B, C, D, E

10. Die Summe von acht reellen Zahlen ist $\frac{4}{3}$ *und* eine beliebige Summe von sieben dieser Zahlen ist stets positiv.
Die Frage: Welche ist die kleinste ganze Zahl, die unter den acht Zahlen vorkommen kann?

(A) *–9* **(B)** *–7* **(C)** *–5* **(D)** *–3* **(E)** *–1*

Lösung: In **Teil 1** führen wir Bezeichnungen ein und formulieren einige Feststellungen. Die acht Zahlen seien $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ und wir nehmen ferner an, dass die Zahlen in aufsteigender Reihenfolge sind, also $a_1 \le a_2 \le ... \le a_8$.

1. Feststellung: $a_1 + a_2 + ... + a_8 = \frac{4}{3}$

2. Feststellung: $a_8 > 0$. Denn: Ansonsten wäre $a_1 + a_2 + ... + a_7$ nicht positiv.

3. Feststellung: $a_8 < \frac{4}{3}$. Dies folgt aus $a_1 + a_2 + ... + a_7 > 0$ sowie aus der 1. Feststellung.
In **Teil 2** ermitteln wir die kleinste negative Zahl, die in Frage kommt.
Aus $a_1 \le a_2 \le ... \le a_8$ folgt:

$a_2 + a_3 + ... + a_7 \le 6a_8 < 6 \cdot \frac{4}{3} = 8$, also $a_2 + a_3 + ... + a_7 < 8$ (*)

Andererseits ist $a_1 + a_2 + ... + a_7 > 0$ (**)

Aus (*) und (**) folgt $a_1 > -8$. Beschränken wir uns für a_1 auf ganze Zahlen, so ist –7 die kleinste für a_1 in Frage kommende Zahl.
In **Teil 3** zeigen wir, dass **–7** als kleinster Wert tatsächlich möglich ist. Dazu geben wir ein Beispiel an: $a_1 = -7$ und $a_2 = a_3 = ... = a_8 = \frac{25}{21}$.

Die Summe der acht Zahlen ist $-7 + 7 \cdot \frac{25}{21} = 7 \cdot \left(-1 + \frac{25}{21}\right) = 7 \cdot \frac{4}{21} = \frac{4}{3}$, die erste Bedingung ist erfüllt. Wir berechnen nun die kleinste Summe, die aus sieben Zahlen entstehen kann: $a_1 + a_2 + ... + a_7 = -7 + 6 \cdot \frac{25}{21} = \frac{50}{7} - 7 > 0$.

Da die kleinste Summe aus sieben Zahlen positiv ist, müssen alle anderen Summen aus sieben Zahlen ebenso positiv sein. Die zweite Bedingung ist also auch erfüllt.

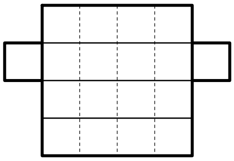
Die richtige(n) Antwort(en): B

11. Peter baut aus kleinen Würfeln mit der Kantenlänge 1 cm einen Quader. Diesen Quader kann er anschließend mit drei quadratischen Flächen komplett bekleben (ohne Überlappungen), wobei alle drei quadratischen Flächen ganzzahlige Seitenlängen in cm haben. **Die Frage**: Wie viele Würfel mit der Kantenlänge 1 cm kann Peter insgesamt verwendet haben?
Bemerkungen: Unter den drei quadratischen Flächen können auch gleich große vorkommen. Die Quadrate dürfen nicht zerschnitten werden. Von den drei Quadraten bleibt nach dem Bekleben nichts übrig.

(A) *2* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *24* **(E)** *32*

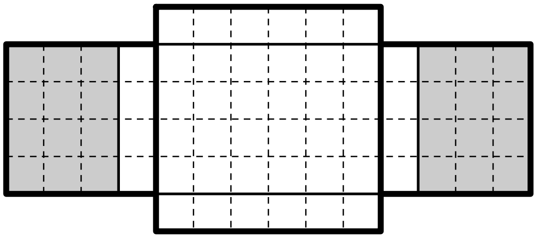
Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **4**, **24** und **32** Lösungen sind. *Figur 1* zeigt das Netz eines 1×1×4 Quaders bestehend aus **4** Würfeln. Die Beklebung erfolgt mit zwei 1 cm x 1cm und mit einem 4 cm × 4 cm Quadrat. *Figur 2* zeigt das Netz eines 1×4×6 Quaders bestehend aus **24** Würfeln. Die Beklebung erfolgt mit zwei 4 cm × 4 cm Quadraten und mit einem 6 cm × 6 cm Quadrat. Die eine 4 cm × 6 cm Seitenfläche des Quaders wurde mittig in zwei 4 cm × 3 cm Teile zerlegt, die in der Figur schraffiert sind. *Figur 3* zeigt das Netz eines 2×2×8 Quaders bestehend aus **32** Würfeln. Die Beklebung erfolgt mit zwei 2 cm × 2 cm Quadraten und mit einem 8 cm × 8 cm Quadrat.

Diese Lösung entsteht aus dem 1×1×4 Quader durch Verdoppelungen.



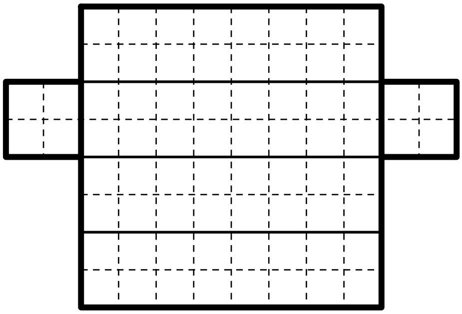
1 cm × 1 cm × 4 cm

Figur 1



1 cm × 4 cm × 6 cm

Figur 2



2 cm × 2 cm × 8 cm

Figur 3

In **Teil 2** zeigen wir, dass 2 keine Lösung ist. Begründung: Aus 2 Würfeln kann nur ein Quader der Form 1×1×2 gebaut werden. Er hat die Oberfläche $4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 10$ cm². Wenn eine Beklebung möglich wäre, dann gäbe es drei Quadrate mit den Quadratseiten *a*, *b* und *c* (wobei *a*, *b* und *c* nicht unbedingt alle verschieden sein müssen), so dass $a^2 + b^2 + c^2 = 10$ (*).

Unter den Quadratzahlen a^2, b^2 und c^2 kann 9 nicht vorkommen (sonst hätte man als Oberfläche mindestens $9 + 1 + 1 = 11$ cm²). Es gibt keine Belegung von a^2, b^2 und c^2 mit 1 und 4, so dass (*) aufgeht. 2 ist daher keine Lösung.

In **Teil 3** zeigen wir, dass 5 keine Lösung ist. Begründung: Aus 5 Würfeln kann nur ein Quader der Form 1×1×5 gebaut werden. Er hat die Oberfläche $4 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 22$ cm². Wenn eine Beklebung möglich wäre, dann gäbe es drei Quadrate mit den Quadratseiten *a*, *b* und *c* (wobei a, b und c nicht unbedingt alle verschieden sein müssen), so dass $a^2 + b^2 + c^2 = 22$ (**).

Unter den Quadratzahlen a^2, b^2 und c^2 kann 16 nicht vorkommen (man kann die Differenz 22 –16 = 6 nicht als Summe mit zwei Summanden 1 oder 4 darstellen). Unter den Quadratzahlen aus (**) müsste 9 vorkommen (sonst wäre die Oberfläche höchstens $4 + 4 + 4 = 12$). Für (**) ginge $4 + 9 + 9 = 22$ (als einzige Möglichkeit). $4 + 9 + 9 = 2^2 + 3^2 + 3^2$ bedeutet: Die Quadratseiten könnten nur 2 cm, 3 cm und 3 cm sein. Der 1×1×5 Quader hat aber zwei Seitenflächen der Form 1 cm x 1 cm. Ein Quadrat mit der Seitenlänge 2 cm oder

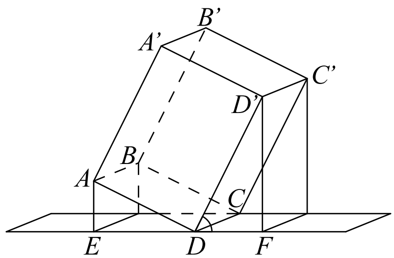
3 cm ragt über eine 1 cm x 1 cm Fläche in mindestens zwei Richtungen hinaus. Daher ist es nicht möglich, da beim Bekleben Überlappungen entstünden. 5 ist daher keine Lösung.

Die richtige(n) Antwort(en): B, D, E

12. Ein Quader hat als Grundfläche das Quadrat *ABCD*. Der Quader hat somit nur zwei unterschiedliche Kantenlängen. Die eine beträgt 6 cm und die andere 8 cm. Eine Ebene *H* geht durch die Kante *DC*. Der Quader wird auf diese Ebene senkrecht projiziert. Wie viele cm^2 kann das Maximum des Flächeninhalts der Projektion betragen?
Bemerkung: Durch jeden Punkt des Quaders wird eine zu *H* senkrechte Gerade gelegt. Ihre Schnittpunkte mit *H* (Lotfußpunkte) bilden die Projektionsfläche.

(A) *36* **(B)** *60* **(C)** *64* **(D)** *80* **(E)** *100*

Lösung: Wir verwenden die Bezeichnungen aus der Figur, wobei $a = \overline{AB} = \overline{AD}$ und $b = \overline{AA'}$. In **Teil 1** formulieren wir einige Feststellungen und Teilergebnisse.



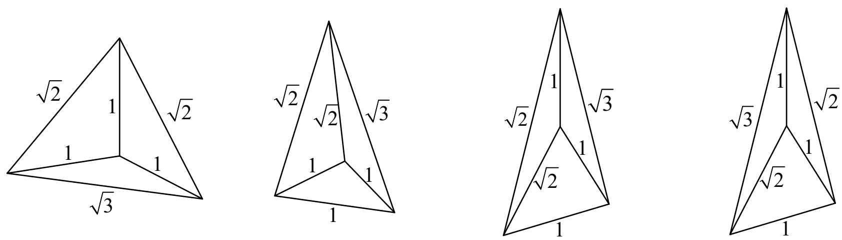
1. Feststellung: Es gibt zwei Möglichkeiten: a = 6 cm und b = 8 cm oder a = 8 cm und b = 6 cm.
2. Feststellung: $\overline{AD'} = \sqrt{6^2+8^2}$ = 10 cm (Satz des Pythagoras im Dreieck *ADD'*). Dieses Ergebnis gilt in beiden Fällen.
3. Feststellung: Der Flächeninhalt der Projektion ist dann am größten, wenn die Ebene *H* parallel zur Fläche *ABC'D'* verläuft.
Aus der 3. Feststellung folgt:
4. Feststellung: Der Flächeninhalt des Rechtecks *ABC'D'* ergibt den maximalen Flächeninhalt der Projektion.
In **Teil 2** ermitteln wir den maximalen Flächeninhalt der Projektion. Unser Ansatz ist die 2. und die 4. Feststellung. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.
1. Fall: a = 6 cm und b = 8 cm. Der maximale Flächeninhalt beträgt $\overline{AB}\cdot\overline{AD'} = 6\cdot 10 =$ **60** cm^2.
2. Fall: a = 8 cm und b = 6 cm. Der maximale Flächeninhalt beträgt $\overline{AB}\cdot\overline{AD'} = 8\cdot 10 =$ **80** cm^2.

Die richtige(n) Antwort(en): B, D

13. Eine dreiseitige Pyramide hat die Kantenlängen 1; 1; 1; $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$. Anna schraffiert alle Seitenflächen der Pyramide, die rechtwinklige Dreiecke sind. Wie viele Seitenflächen konnte Anna insgesamt schraffiert haben?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *3* **(E)** *4*

Lösung: In **Teil 1** finden wir alle möglichen Pyramiden. Unser Ansatz ist die gegenseitige Lage der drei Kanten mit der Länge 1. In *Figur 1* haben sie einen gemeinsamen Eckpunkt, in *Figur 2* bilden sie ein gleichseitiges Dreieck, in *Figur 3* und *Figur 4* haben sie nur paarweise gemeinsame Eckpunkte. Das systematische Probieren ergibt die vier Pyramiden aus den Figuren.
Bemerkung: Pyramiden, die durch Spiegelungen oder Drehungen aus den vier abgebildeten Pyramiden entstehen, wurden nicht berücksichtigt.
Beachte: *Figur 3* und *Figur 4* sind unterschiedlich, denn bei *Figur 3* gibt es eine Seitenfläche mit $\left(1;\, 1;\, \sqrt{3}\right)$, bei *Figur 4* nicht.



Figur 1 *Figur 2* *Figur 3* *Figur 4*

In **Teil 2** untersuchen wir, welche der entstandenen Dreiecke rechtwinklig sind. Dazu wenden wir den Kehrsatz des Satzes von Pythagoras an.
Beispiel 1: Ein Dreieck $\left(1;\, \sqrt{2};\, \sqrt{3}\right)$ ist rechtwinklig, da $1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2$.

Beispiel 2: Ein $\left(1;\, \sqrt{2};\, \sqrt{2}\right)$ Dreieck ist nicht rechtwinklig wegen $1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 \neq \left(\sqrt{2}\right)^2$.

Im Folgenden fassen wir die Ergebnisse zusammen, ohne Nebenrechnungen durchzuführen. Der geneigte Leser möge einige Dreiecke selbst prüfen.

Figur 1: Rechtwinklig sind: $\left(1;\, 1;\, \sqrt{2}\right)$ und $\left(1;\, 1;\, \sqrt{2}\right)$, also **2** Seitenflächen.
Nicht rechtwinklig sind: $\left(1;\, 1;\, \sqrt{3}\right)$ und $\left(\sqrt{2};\, \sqrt{2};\, \sqrt{3}\right)$.

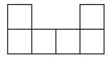
Figur 2: Rechtwinklig sind: $\left(1;\, \sqrt{2};\, \sqrt{3}\right)$ und $\left(1;\, \sqrt{2};\, \sqrt{3}\right)$, **2** Seitenflächen.
Nicht rechtwinklig sind: $\left(1;\, 1;\, 1\right)$ und $\left(1;\, \sqrt{2};\, \sqrt{2}\right)$.

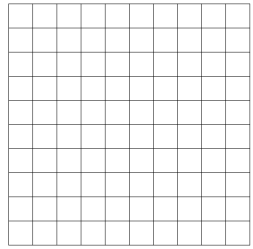
Figur 3: Rechtwinklig sind: $\left(1;\, 1;\, \sqrt{2}\right)$ und $\left(1;\, \sqrt{2};\, \sqrt{3}\right)$, **2** Seitenflächen.
Nicht rechtwinklig sind: $\left(1;\, 1;\, \sqrt{3}\right)$ und $\left(1;\, \sqrt{2};\, \sqrt{2}\right)$.

Figur 4: $\left(1;\, 1;\, \sqrt{2}\right)$, $\left(1;\, 1;\, \sqrt{2}\right)$, $\left(1;\, \sqrt{2};\, \sqrt{3}\right)$ und $\left(1;\, \sqrt{2};\, \sqrt{3}\right)$ sind alle rechtwinklig, also **4** Seitenflächen.

Die richtige(n) Antwort(en): C, E

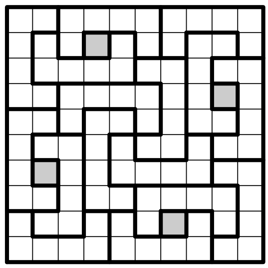
Aufgabe zur detaillierten Ausarbeitung:

14. Eure Aufgabe besteht darin, auf das 10×10 Brett 12, 13, 14, 15 oder 16 gleiche Figuren der Form  zu legen. Es darf keine Überlappungen geben *und* keine der Figuren darf über das Brett hinausragen (es dürfen aber Felder übrig bleiben, die nicht abgedeckt werden). Zeichnet nur jenes Brett ab, das die meisten Figuren verwendet (12, 13, 14, 15 oder 16).



Beachte: Je mehr Figuren eure Lösung hat, desto mehr Punkte ist sie wert.

Lösung: Die folgende Abbildung enthält 16 Figuren:



Bei mehreren Lösungen wird nur die mit den meisten Figuren gewertet.
Für 12 Figuren gibt es 3 Punkte, für 13 Figuren gibt es 6 Punkte.
Für 14 Figuren gibt es 8 Punkte, für 15 Figuren gibt es 12 Punkte.
Für 16 Figuren gibt es 16 Punkte. (Insgesamt maximal 16 Punkte.)
Fehlerhafte Lösungen werden nicht gewertet.