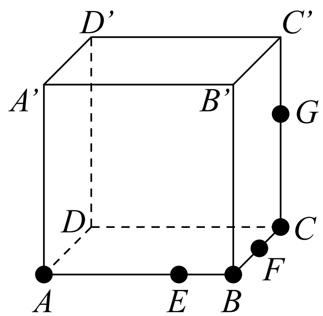
Lösungen – Klasse 11

1. Thomas markiert auf der Oberfläche eines Würfels einige Punkte, so dass folgende Bedingung erfüllt ist: Es gibt keine zwei Seitenflächen mit gleich vielen markierten Punkten.
Wie viele Punkte konnte Thomas insgesamt markiert haben?
Bemerkung: Ein Punkt einer Kante liegt auf beiden angrenzenden Seitenflächen (und sogar auf drei, wenn es sich um einen Eckpunkt handelt).

(A) *5* **(B)** *6* **(C)** *10* **(D)** *12* **(E)** *15*

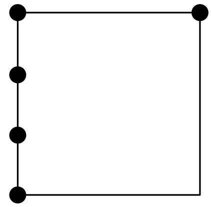
Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **6** eine Lösung ist. Dazu haben wir sechs passende Punkte markiert (siehe *Figur 1*). Tatsächlich, *A'B'C'D'* hat 0 Punkte, *ADD'A'* hat 1 Punkt usw.
Anregung: Der geneigte Leser möge alle Seitenflächen paarweise untersuchen.



Figur 1

In **Teil 2** zeigen wir, dass **10** eine Lösung ist. Tatsächlich, es reicht, wenn wir bei *Figur 1* im Inneren des Quadrates *ABCD* 4 weitere Punkte markieren.
In **Teil 3** zeigen wir, dass **12** eine Lösung ist. Tatsächlich, es reicht, wenn wir bei *Figur 1* im Inneren des Quadrates *ABCD* 6 weitere Punkte markieren.
In **Teil 4** zeigen wir, dass **15** eine Lösung ist. Tatsächlich, es reicht, wenn wir bei *Figur 1* im Inneren des Quadrates *ABCD* 9 weitere Punkte markieren.
In **Teil 5** zeigen wir, dass 5 keine Lösung darstellt.
Nehmen wir für einen Augenblick an, dass 5 doch eine Lösung wäre und untersuchen wir diese Annahme.
1. Feststellung: Die Anzahlen der Punkte auf den sechs Seitenflächen sind 0, 1, 2, 3, 4, 5. Begründung: Um die Bedingung der Aufgabe zu erfüllen, muss auf jeder Seitenfläche eine andere Anzahl von Punkten stehen.
2. Feststellung: Wenn wir die Punkte auf allen Seitenflächen zusammenzählen, erhalten wir $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.
Da es in der Tat nur 5 Punkte gibt, wurden die Punkte mehrfach gezählt.
3. Feststellung: Jeder Punkt muss genau dreimal gezählt worden sein. Begründung: $15 : 3 = 5$, die tatsächliche Anzahl der Punkte.
Aus der 3. Feststellung folgt:
4. Feststellung: Jeder der 5 Punkte ist ein Eckpunkt.

Dies bedeutet aber: Auf keiner Seitenfläche können genau 5 Punkte liegen. Denn jede Seitenfläche hat genau vier, keine 5 Eckpunkte. Dies zeigt, dass 5 keine Lösung darstellt.



Figur 2

Alternativlösungsansatz zu Teil 5:
Figur 2 zeigt jene Seitenfläche, auf der 5 Punkte liegen. Auf der gegenüberliegenden Seitenfläche gibt es dann keine Punkte. Bei dieser Verteilung der Punkte (*Figur 2*) können auf keiner der Seitenflächen genau 3 Punkte liegen.
Anregung: Der geneigte Leser möge andere Verteilungen der 5 Punkte selbst prüfen.
5 stellt daher keine Lösung dar.

Die richtige(n) Antwort(en): B, C, D, E

2. Unter 35! versteht man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 35, also $35! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35$. Wenn man dieses Produkt ausrechnet, erhält man $35! = 10333147966386144929a66651337523200000000$.
Die Frage: Welchen Wert kann die Ziffer a annehmen?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *3* **(D)** *6* **(E)** *9*

Lösung: Wir schreiben zunächst das Produkt ausführlicher aus und formulieren einige Feststellungen.
$35! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot .4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot ... \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35$
1. Feststellung: 35! ist teilbar durch 9. Denn: *9* ist ein Faktor des Produktes.
2. Feststellung: Die Summe der Ziffern des ausgerechneten Produkts beträgt $138 + a$. Denn: 1 + 0 + 3 + 3 + 3 + 1 + 4 + 7 + 9 + 6 + 3 + 8 + 6 + 1 + 4 + 4 + 2 + 9 + a + 6 +6 + 6 + 5 + 1 + 3 + 3 + 7 + 5 + 2 + 3 + 2 = $138 + a$.
3. Feststellung: $138 \leq 138 + a \leq 147$. Denn: Der kleinste Wert für a ist 0, der größte Wert ist 9.
4. Feststellung: Die einzige durch 9 teilbare Zahl zwischen 138 und 147 ist die 144 ($144 = 16 \cdot 9$). Der geneigte Leser möge dies prüfen.
Aus der 2. und 4. Feststellung folgt: $138 + a = 144$ und damit $a = \mathbf{6}$.

Die richtige(n) Antwort(en): D

3. Im Parlament von Neidland sitzen 100 Abgeordnete. Es gibt keine zwei Abgeordnete, die dasselbe Gehalt haben. Im Plenarsaal stehen 100 Stühle in einem Quadrat mit 10 Reihen und 10 Spalten. Jeder Abgeordnete kennt die Gehälter seiner direkten Nachbarn: rechts, links, vorne, hinten und auch diagonal benachbart (jeder hat also bis zu 8 Nachbarn – diejenigen, die am Rand sitzen, etwas weniger). Nur jene Abgeordnete sind mit ihrem Gehalt zufrieden, die höchstens einen direkten Nachbar haben, der mehr verdient als sie selbst. **Die Frage**: Insgesamt wie viele der 100 Abgeordneten können mit ihrem Gehalt zufrieden sein?

(A) *2* **(B)** *6* **(C)** *10* **(D)** *50* **(E)** *60*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **2**, **6**, **10** und **50** Lösungen sind. Dazu geben wir jeweils ein passendes Beispiel an. Erläuterungen zu den Tabellen: Die 100 unterschiedlichen Gehälter wurden von 1 bis 100 in steigender Reihenfolge durchnummeriert. Die schraffierten Felder stehen für zufriedene Abgeordnete.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	84	85	88	89	92	93	96	97	98
82	83	86	87	90	91	94	95	99	100

2 zufriedene Abgeordnete

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	84	85	88	89	90	91	92	93	94
82	83	86	87	95	96	97	98	99	100

6 zufriedene Abgeordnete

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

10 zufriedene Abgeordnete

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

50 zufriedene Abgeordnete

In **Teil 2** zeigen wir, dass 60 <u>keine</u> Lösung darstellt. Dazu zerlegen wir die 100 Sitze in 25 quadratische Bereiche der Form 2×2. In jedem solchen Bereich sitzen vier benachbarte Abgeordnete. Von diesen vier können jedoch höchstens zwei zufrieden sein: Der, mit dem höchsten und der mit dem zweithöchsten Gehalt in diesem Bereich (die anderen zwei haben mehr als einen Nachbar, der besser verdient als sie). Insgesamt können also höchstens $25 \cdot 2 = 50$ Abgeordnete zufrieden sein. Daraus folgt, dass 60 <u>keine</u> Lösung ist.

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C, D

4. Welche Primzahl kann ein Teiler sowohl für n^2+8 als auch für $(n+1)^2+8$ sein (n ist eine natürliche Zahl)?

(A) *3* **(B)** *5* **(C)** *7* **(D)** *11* **(E)** *13*

Lösung: In **Teil 1** führen wir Bezeichnungen ein und formulieren einige Feststellungen. Es sei p eine Primzahl, die sowohl für n^2+8 als auch für $(n+1)^2+8$ ein Teiler ist.

1. Feststellung: Wenn p die natürliche Zahl a teilt, dann teilt p auch jedes Vielfache von a.
2. Feststellung: Wenn p die natürlichen Zahlen a und b teilt, dann teilt p auch die Summe $a+b$ und die Differenz $a-b$.
Aus der 1. und 2. Feststellung folgt:
3. Feststellung: Wenn p die natürlichen Zahlen a und b teilt, dann teilt p auch den Term $ca+db$ (c, d sind ganze Zahlen).
In **Teil 2** ermitteln wir p. Im *1. Schritt* wenden wir die 2. Feststellung für $a = n^2+8$ und $b = (n+1)^2+8$ an. Es folgt: p teilt $(n+1)^2+8-(n^2+8)$.

Nebenrechnungen: $(n+1)^2+8 = n^2+2n+1+8 = n^2+2n+9$ und

$n^2+2n+9-(n^2+8) = 2n+1$. Dies bedeutet:
4. Feststellung: p ist ein Teiler von $2n+1$.
Im *2. Schritt* wenden wir die 3. Feststellung für $a = n^2+8$, $b = 2n+1$, $c = 4$ und $d = -(2n-1)$ an. Es folgt: p teilt $4(n^2+8)-(2n-1)(2n+1)$.

Nebenrechnung: $4(n^2+8)-(2n-1)(2n+1) = 4n^2+32-(4n^2-1) = 33$.

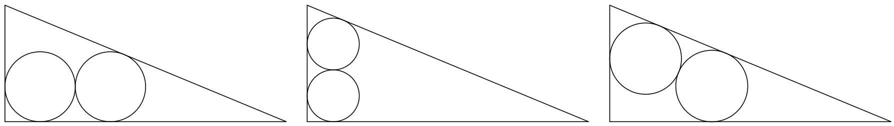
Dies bedeutet:
5. Feststellung: p ist ein Teiler von 33.
6. Feststellung: Die einzigen Primzahlteiler von 33 sind 3 und 11.
Im *3. Schritt* zeigen wir, dass **3** eine Lösung darstellt. Tatsächlich, 3 ist ein Teiler von $1^2+8=9$ *und* $2^2+8=12$. Im *4. Schritt* zeigen wir, dass **11** eine Lösung darstellt. Denn 11 ist ein Teiler von $5^2+8=33$ *und* $6^2+8=44$.
Beachte: Sowohl 3 als auch 11 können durch direktes Probieren auch ohne Vorüberlegungen gefunden werden (dass die anderen Zahlen keine Lösungen sind, lässt sich mit Probieren allerdings nicht herausfinden).

Die richtige(n) Antwort(en): A, D

5. Die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks ABC sind 5 cm, 12 cm und 13 cm lang. Im Inneren des Dreiecks befinden sich zwei gleich große Kreise, für die gilt: I. Sie berühren sich *und* II. Jeder von ihnen berührt genau zwei Seiten des Dreiecks. **Die Frage**: Wie viele cm lang können die Radien der Kreise sein?

(A) *1* **(B)** $\frac{10}{9}$ **(C)** $\frac{26}{17}$ **(D)** $\frac{3}{2}$ **(E)** *2*

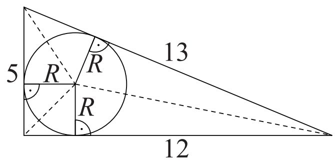
Lösung: In **Teil 1** zählen wir alle möglichen Lagen der zwei Kreise auf, die beide Bedingungen erfüllen. Es gibt diese drei Fälle:



1. Fall 2. Fall 3. Fall

In **Teil 2** berechnen wir den Radius R jenes Kreises, der in das Dreieck einbeschrieben ist (dieses Teilergebnis werden wir später brauchen). Dazu schreiben wir den Flächeninhalt des Dreiecks auf zwei Arten:

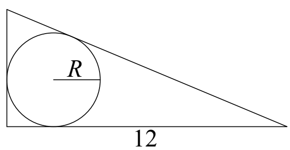
$A = \frac{5 \cdot 12}{2}$ und $A = \frac{5 \cdot R}{2} + \frac{12 \cdot R}{2} + \frac{13 \cdot R}{2}$ oder $A = \frac{(5+12+13) \cdot R}{2}$, siehe *Figur 1*. Da es sich um denselben Flächeninhalt handelt, folgt durch Gleichsetzen: $\frac{5 \cdot 12}{2} = \frac{(5+12+13) \cdot R}{2}$. Dies ergibt $R = 2$.



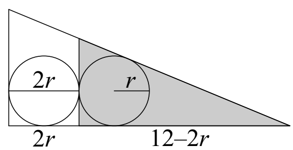
Figur 1

In **Teil 3** ermitteln wir den gesuchten Radius r im 1. Fall. Unser Ansatz: Das Dreieck ABC und das schraffierte Dreieck aus *Figur 3* sind ähnlich.

1. Fall:



Figur 2

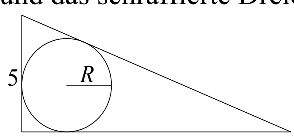


Figur 3

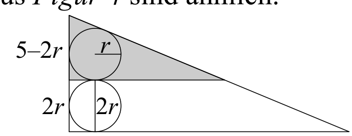
Aus der Ähnlichkeit folgt:

$$\frac{R}{r} = \frac{12}{12-2r} \Leftrightarrow \frac{2}{r} = \frac{12}{12-2r} \Leftrightarrow 2(12-2r) = 12r \Leftrightarrow r = \mathbf{\frac{3}{2}}.$$

In **Teil 4** ermitteln wir den gesuchten Radius r im 2. Fall. Unser Ansatz: Das Dreieck ABC und das schraffierte Dreieck aus *Figur 4* sind ähnlich.



Figur 2

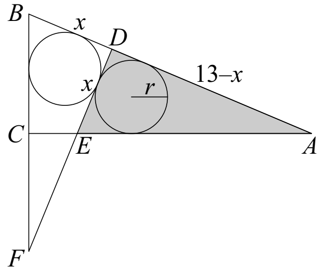


Figur 4

Aus der Ähnlichkeit folgt:

$$\frac{R}{r} = \frac{5}{5-2r} \Leftrightarrow \frac{2}{r} = \frac{5}{5-2r} \Leftrightarrow 2(5-2r) = 5r \Leftrightarrow r = \mathbf{\frac{10}{9}}.$$

In **Teil 5** ermitteln wir den gesuchten Radius r im 3. Fall. In *Figur 5* ist FD die gemeinsame Tangente der zwei Kreise und $FD \perp AB$. Unser Ansatz: Sowohl die Dreiecke ABC und AED als auch die Dreiecke AED und FBD sind ähnlich, denn die Winkel sind in beiden Fällen paarweise gleich groß. Es sei $x = \overline{BD} = \overline{DE}$. Es folgt $\frac{x}{\overline{CB}} = \frac{13-x}{\overline{CA}} \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{13-x}{12}$ oder $12x = 5(13-x)$, d. h. $x = \frac{65}{17}$. Ferner gilt $\frac{r}{R} = \frac{x}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \frac{r}{2} = \frac{x}{5}$, d. h. $r = \frac{2}{5}x = \frac{2}{5} \cdot \frac{65}{17} = \mathbf{\frac{26}{17}}$.



Figur 5

Die richtige(n) Antwort(en): B, C, D

6. Wir betrachten die Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$, $bx^2 + cx + a = 0$ und $cx^2 + ax + b = 0$ (a, b, c sind reelle Zahlen mit $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$). Man löst zunächst die drei Gleichungen getrennt und notiert alle (reellen) Lösungen. **Die Frage:** Wie viele unterschiedliche Lösungen kann man so insgesamt erhalten?

(A) *0* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4* **(E)** *6*

Lösung: In **Teil 1** formulieren wir einige Feststellungen.

<u>1. Feststellung</u>: Die erste Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat zwei Lösungen, wenn $b^2 > 4ac$, eine Lösung, wenn $b^2 = 4ac$, ansonsten keine Lösung in $\mathbb{R}$.

Begründung: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Wenn der Term unter der Wurzel positiv ist, gibt es zwei Lösungen, x_1 und x_2. $b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow b^2 > 4ac$.

Wenn der Term unter der Wurzel Null ist, gibt es eine Lösung ($x_1 = x_2$). $b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow b^2 = 4ac$. Wenn der Term unter der Quadratwurzel negativ ist, gibt es keine Lösung. $b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow b^2 < 4ac$.

Ganz ähnlich folgt:

<u>2. Feststellung</u>: Die zweite Gleichung $bx^2 + cx + a = 0$ hat zwei Lösungen, wenn $c^2 > 4ab$, eine Lösung, wenn $c^2 = 4ab$, keine Lösung wenn $c^2 < 4ab$.

<u>3. Feststellung</u>: Die dritte Gleichung $cx^2 + ax + b = 0$ hat zwei Lösungen, wenn $a^2 > 4bc$, eine Lösung, wenn $a^2 = 4bc$, keine Lösung wenn $a^2 < 4bc$.
In **Teil 2** zeigen wir, dass **0** eine Lösung darstellt. Für $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$ gilt: $3^2 < 4 \cdot 3 \cdot 4$, $4^2 < 4 \cdot 2 \cdot 3$, $2^2 < 4 \cdot 3 \cdot 4$. Aus den drei Feststellungen folgt, dass keine der Gleichungen Lösungen hat. Es gibt also **0** Lösungen.
In **Teil 3** zeigen wir, dass **2** eine Lösung darstellt. Für $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ gilt: $2^2 < 4 \cdot 1 \cdot 3$, $3^2 > 4 \cdot 1 \cdot 2$, $1^2 < 4 \cdot 2 \cdot 3$. Aus den Feststellungen folgt, dass nur die Gleichung $2x^2 + 3x + 1 = 0$ Lösungen hat (zwei). Es gibt also **2** Lösungen.
In **Teil 4** zeigen wir, dass **3** eine Lösung darstellt. Für $a = 1$, $b = 6$, $c = 9$ gilt: $6^2 = 4 \cdot 1 \cdot 9$, $9^2 > 4 \cdot 1 \cdot 6$, $1^2 < 4 \cdot 6 \cdot 9$. Aus den Feststellungen folgt, dass die erste Gleichung $x^2 + 6x + 9 = 0$ die Lösung $x = -3$ hat und die zweite Gleichung $6x^2 + 9x + 1 = 0$ zwei Lösungen hat (keine davon ist die –3). Es gibt also insgesamt **3** (1 + 2) Lösungen.
In **Teil 5** zeigen wir, dass **4** eine Lösung darstellt. Für $a = 1$, $b = 5$, $c = 6$ gilt: $5^2 > 4 \cdot 1 \cdot 6$, $6^2 > 4 \cdot 1 \cdot 5$, $1^2 < 4 \cdot 5 \cdot 6$. Aus den Feststellungen folgt, dass nur die ersten zwei Gleichungen je zwei Lösungen haben: $x^2 + 5x + 6 = 0$ (–2 und –3) bzw. $5x^2 + 6x + 1 = 0$ (–1 und $-\frac{1}{5}$). Es gibt also insgesamt **4** (2 + 2) Lösungen.
In **Teil 6** zeigen wir, dass 6 <u>keine</u> Lösung darstellt. Tatsächlich, 6 könnte nur folgendermaßen zu Stande kommen: 6 = 2 + 2 + 2. Dies bedeutete, dass alle drei Gleichungen je zwei Lösungen hätten. Laut Feststellungen müsste gelten: $b^2 > 4ac$, $c^2 > 4ab$ und $a^2 > 4bc$. Wir multiplizieren die linken und die rechten Seiten dieser drei Ungleichungen ($a > 0$, $b > 0$ und $c > 0$). Es folgt: $a^2b^2c^2 \geq 64a^2b^2c^2$, oder, geteilt durch $a^2b^2c^2$: $1 \geq 64$. Diese falsche Aussage zeigt, dass 6 <u>nicht</u> möglich ist.

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C, D

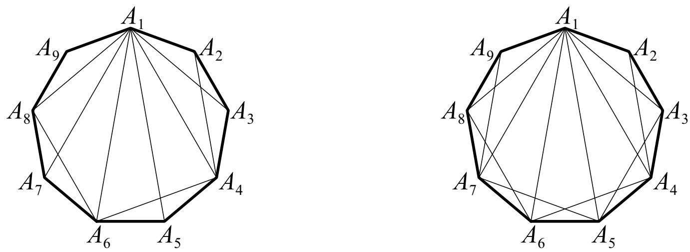
7. Sophie findet an der Tafel ein konvexes Neuneck vor. Sie zeichnet Diagonalen so in dieses Neuneck, dass gilt: Jede neu gezeichnete Diagonale schneidet höchstens eine der bereits vorhandenen Diagonalen (es geht um Schnittpunkte im Inneren der Diagonalen, die Eckpunkte sind ohne Bedeutung). Sophie setzt das Zeichnen von Diagonalen so lange fort, wie es unter diesen Bedingungen möglich ist. **Die Frage**: Wie viele Diagonalen konnte Sophie insgesamt gezeichnet haben?
<u>Bemerkung</u>: Ein Vieleck heißt konvex, wenn es keine überstumpfen Innenwinkel hat.

(A) *5* **(B)** *9* **(C)** *12* **(D)** *15* **(E)** *18*

Lösung: Wir bezeichnen die neun Eckpunkte mit $A_1, A_2, ..., A_9$.
In **Teil 1** zeigen wir, dass **9** und **12** Lösungen sind. Dazu geben wir jeweils ein

passendes Beispiel an. *Figur 1* zeigt ein Beispiel mit **9** Diagonalen. Sie wurden in dieser Reihenfolge eingezeichnet:

$$A_1A_3,\ A_1A_4,\ A_1A_5,\ A_1A_6,\ A_1A_7,\ A_1A_8,\ A_2A_4,\ A_4A_6,\ A_6A_8\,.$$



Figur 1 *Figur 2*

Figur 2 zeigt ein Beispiel mit **12** Diagonalen. Diese wurden so eingezeichnet:

$$A_2A_4,\ A_3A_5,\ A_4A_6,\ A_5A_7,\ A_6A_8,\ A_7A_9\,,\ A_1A_3,\ A_1A_4,\ A_1A_5,\ A_1A_6,\ A_1A_7,\ A_1A_8\,.$$

In **Teil 2** zeigen wir, dass 15 und 18 <u>keine</u> Lösungen sind. Dazu beweisen wir zunächst folgende Behauptung:

<u>Behauptung</u>: In einem konvexen n-Eck können unter der vorhandenen Bedingung höchstens $2n-6$ Diagonalen eingezeichnet werden.

<u>Beweis der Behauptung</u>: Wir markieren die einzelnen Diagonalen mit zwei Farben, mit Grün und Rot, nach folgendem System: Die erste Diagonale sei grün. Die zweite Diagonale wird rot, wenn sie die vorherige grüne Diagonale schneidet – ansonsten wird sie grün. Wir setzen dieses Verfahren fort: Jede weitere Diagonale wird rot, wenn sie eine vorherige grüne Diagonale schneidet. Ansonsten wird sie grün. Aus der Verfahrensweise folgt:

<u>1. Feststellung</u>: Keine zwei grünen Diagonalen schneiden sich.

<u>2. Feststellung</u>: Keine zwei roten Diagonalen schneiden sich.

Stellen wir uns nun vor, dass in einem n-Eck k Diagonalen eingezeichnet wurden, so dass keine zwei von ihnen sich schneiden.

<u>3. Feststellung</u>: Die k Diagonalen zerlegen das n-Eck in $k+1$ Vielecke.

<u>4. Feststellung</u>: In den Vielecken aus der 3. Feststellung gibt es mindestens $3(k+1)$ Seiten. Dies liegt daran, dass jedes Vieleck mindestens 3 Seiten besitzt.

<u>5. Feststellung</u>: In den Vielecken aus der 3. Feststellung gibt es insgesamt genau $n+2k$ Seiten. Begründung: Jede der k Diagonalen kommt in genau 2 Vielecken vor. Dazu kommen noch die n Seiten des n-Ecks.

Aus der 4. und 5 Fesstellung folgt:

$3(k+1) \le n+2k$ oder $k \le n-3$. Mit Hilfe der 1. und 2. Feststellung folgt:

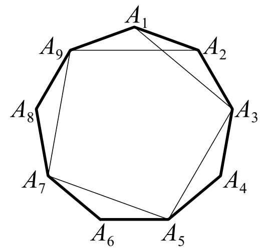
<u>6. Feststellung</u>: In einem n-Eck können höchstens $n-3$ grüne und höchstens $n-3$ rote Diagonalen sein.

Die Gesamtanzahl der Diagonalen ist somit höchstens $2(n-3) = 2n-6$.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aus der Behauptung folgt: In einem Neuneck kann Sophie höchstens

$2 \cdot 9 - 6 = 12$ Diagonalen zeichnen. Dies bedeutet, dass weder 15 noch 18 Lösungen sind.
Es läßt sich zeigen, dass 5 keine Lösung ist. Selbst wenn wir versuchten, fünf Diagonalen möglichst „optimal" einzuzeichnen (A_1A_3, A_3A_5, A_5A_7, A_7A_9, A_9A_2), gelangen wir zu *Figur 3*. Es gibt aber eine weitere Diagonale, z. B. A_2A_7.



Figur 3

Anregung: Der geneigte Leser möge an weiteren Figuren prüfen, dass 5 keine Lösung ist.

Die richtige(n) Antwort(en): B, C

8. Für die reellen Zahlen *x*, *y*, *z* gilt: $x - y \geq z$ und $x^2 + 4y^2 + 5 = 4z$. Welche der unten aufgeführten Werte kann *z* annehmen?

(A) *1* **(B)** *1,5* **(C)** *2* **(D)** *2,5* **(E)** *3*

Lösung: In **Teil 1** stellen wir eine neue Ungleichung auf. $x - y \geq z$ bedeutet $z \leq x - y$. Aus $x^2 + 4y^2 + 5 = 4z$ und $z \leq x - y$ folgt:

$x^2 + 4y^2 + 5 \leq 4(x - y)$ oder $x^2 + 4y^2 + 5 \leq 4x - 4y$, d. h.

$$x^2 - 4x + 4 + 4y^2 + 4y + 1 \leq 0 \qquad (1)$$

In **Teil 2** führen wir einige Nebenrechnungen durch.

$$(x-2)^2 = (x-2)\cdot(x-2) = x^2 - 4x + 4 \qquad (2)$$

$$(2y+1)^2 = (2y+1)\cdot(2y+1) = 4y^2 + 4y + 1 \qquad (3)$$

In **Teil 3** ermitteln wir *x* und *y*. Aus (1), (2) und (3) folgt:

$$(x-2)^2 + (2y+1)^2 \leq 0 \qquad (*)$$

Andererseits sind Quadratzahlen stets positiv. Dies bedeutet:

$$(x-2)^2 \geq 0 \quad \text{und} \quad (2y+1)^2 \geq 0 \qquad (4)$$

Aus (4) folgt:

$$(x-2)^2 + (2y+1)^2 \geq 0 \qquad (**)$$

(*) und (**) bedeutet: $(x-2)^2 + (2y+1)^2 = 0$. Diese Gleichung geht nur dann auf, wenn $x - 2 = 0$ und $2y + 1 = 0$, d. h. $x = 2$ und $y = -0{,}5$.

In **Teil 4** ermitteln wir z. Aus $x^2+4y^2+5=4z$ folgt $z=\frac{x^2+4y^2+5}{4}$. Wenn wir nun in diesen Term $x = 2$ und $y = -0{,}5$ einsetzen, erhalten wir:

$$z=\frac{x^2+4y^2+5}{4}=\frac{2^2+4\cdot(-0{,}5)^2+5}{4}=\frac{4+1+5}{4}=\frac{10}{4}=2{,}5\,.$$

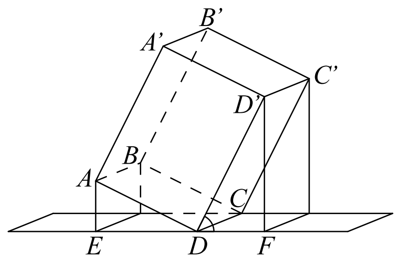
Beachte: Man müsste noch prüfen, dass die Werte $x = 2$, $y = -0{,}5$ und $z = 2{,}5$ die Bedingungen $x-y\geq z$ und $x^2+4y^2+5=4z$ tatsächlich erfüllen. Der geneigte Leser möge dies prüfen.

Die richtige(n) Antwort(en): D

9. Der Quader *ABCDA'B'C'D'* hat als Grundfläche das Quadrat *ABCD* mit der Seitenlänge 6 cm. Die Höhe des Quaders beträgt 8 cm. Eine Ebene *H* geht durch die Kante *DC*. Der Quader wird auf diese Ebene senkrecht projiziert. Wie viele cm^2 kann der Flächeninhalt der Projektion betragen?
Bemerkung: Durch jeden Punkt des Quaders wird eine zu *H* senkrechte Gerade gelegt. Ihre Schnittpunkte mit *H* (Lotfußpunkte) bilden die Projektionsfläche.

(A) *48* **(B)** *56* **(C)** *60* **(D)** *64* **(E)** *80*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **48** eine Lösung ist. Tatsächlich, wenn die Seitenfläche *DCC'D'* in der Ebene *H* liegt, dann ist die Projektionsfläche das Rechtek *DCC'D'* mit dem Flächeninhalt $6\cdot8$ = **48** (cm^2).



In **Teil 2** zeigen wir, dass **60** eine Lösung ist. Wenn die Ebene *H* parallel zur Fläche *ABC'D'* verläuft, ist der Flächeninhalt der Projektion so groß, wie der Flächeninhalt des Rechtecks *ABC'D'* (siehe Figur). Mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck *ADD'* folgt $\overline{AD'}$ = $\sqrt{6^2+8^2}$ = 10 cm. Der Flächeninhalt ist in diesem Fall $6\cdot10$ = **60** (cm^2).

Bemerkung: Es lässt sich zeigen, dass der Projektionsflächeninhalt dann am größten ist, wenn *H* parallel zur Fläche *ABC'D'* verläuft (siehe Teil 2).
Daraus folgt, dass 64 und 80 keine Lösungen darstellen.

In **Teil 3** zeigen wir, dass **56** eine Lösung ist. Begründung: Der Flächeninhalt kann sowohl 48 cm^2 als auch 60 cm^2 betragen (Teil 1 und Teil 2). Wenn wir die Ebene *H* aus ihrer Lage von Teil 2 langsam Richtung ihrer Lage aus Teil 1 drehen, nimmt der Flächeninhalt alle Werte zwischen 60 und 48 an. Es gibt also eine Lage der Ebene *H*, für die der Projektionsflächeninhalt 56 beträgt.

Beachte: Damit ist die Existenz der Lage in Teil 3 bewiesen, ohne sie jedoch explizit zu bestimmen.

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C

10. Die Felder eines 5×5 Brettes werden mit den Zahlen von 1 bis 25 belegt. In jedes Feld kommt genau eine Zahl und jede der Zahlen wird genau einmal verwendet. Unter *Abstand* zweier Felder mit mindestens einem gemeinsamen Eckpunkt verstehen wir die positive Differenz der zwei Zahlen, die in diesen Feldern stehen. Unter *Durchmesser* des Brettes verstehen wir den größten dieser Abstände.

Die Frage: Was kann der Durchmesser des Brettes sein?

(A) *5* **(B)** *6* **(C)** *7* **(D)** *8* **(E)** *9*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **6**, **7**, **8** und **9** Lösungen sind. Dazu geben wir je ein passendes Beispiel an.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Durchmesser 6

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
23	22	21	24	25

Durchmesser 7

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
24	22	23	21	25

Durchmesser 8

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
25	22	23	24	21

Durchmesser 9

Die schraffierten Felder zeigen, wie der Durchmesser zu Stande kommt.

In **Teil 2** zeigen wir, dass 5 keine Lösung ist. Betrachten wir dazu ein mit den Zahlen 1 bis 25 belegtes 5×5 Brett.

1. Feststellung: Wenn wir bei dem Feld mit der Zahl 1 starten und uns stets auf benachbarte Felder (Felder mit mindestens einem gemeinsamen Eckpunkt) fortbewegen, können wir in höchstens 4 Schritten das Feld mit der Zahl 25 erreichen.

Anregung: Der geneigte Leser möge dies an einigen Beispielen aus Teil 1 selbst prüfen.

2. Feststellung: Die Summe der Abstände jedes denkbaren Weges aus der 1. Feststellung beträgt mindestens 24 (25 – 1, die Differenzen sind positiv).

3. Feststellung: Es muss bei jedem Weg aus der 1. Feststellung mindestens einen Schritt geben, bei dem der Abstand mindestens 6 beträgt. Begründung: Ansonsten wäre die Summe der vier Abstände höchstens $4 \cdot 5 = 20$, was aber wegen der 2. Feststellung nicht geht.

Aus der 3. Feststellung folgt, dass der Durchmesser des Brettes mindestens 6 beträgt. Dies bedeutet, dass 5 keine Lösung ist.

Die richtige(n) Antwort(en): B, C, D, E

11. Für das Gleichungssystem $\begin{cases} x^{x-y} = y^2 \\ y^{x-y} = x^6 y^4 \end{cases}$ mit $x > 0$, $y > 0$ lässt sich eine Lösung $(x; y)$ finden, für die gilt:

(A) $x < \frac{1}{2}$ **(B)** $x < 1$ **(C)** $x > 1$ **(D)** $y < 1$ **(E)** $y > 2$

Lösung: In **Teil 1** führen wir eine Umformung durch und formulieren eine Feststellung. Durch das Multiplizieren der zwei Gleichungen des Gleichungssystems folgt: $(xy)^{x-y} = (xy)^6$, oder, geteilt durch $(\mathrm{xy})^6$:

$$(xy)^{x-y-6} = 1 \qquad (*)$$

<u>1. Feststellung</u>: Die Gleichung (*) kann auf zwei Arten erfüllt werden: $x-y-6=0$ oder $xy=1$.

In **Teil 2** untersuchen wir die Bedingung $x-y-6=0$. Unter dieser Voraussetzung gilt:

<u>2. Feststellung</u>: $x-y=6$ und $x=y+6$.

Wegen $y > 0$ folgt:

<u>3. Feststellung</u>: $x > 6$ und $x > y$

Wenn $x > 6$, dann gilt auch $x > 1$. Daraus folgt:

<u>4. Feststellung</u>: $x^3 > x$

Aus der 3. und 4. Feststellung folgt:

<u>5. Feststellung</u>: $x^3 > y$

Wir setzen $x-y=6$ in die erste Gleichung des Gleichungssystems ein: $x^6 = y^2$ oder $x^3 = y$. Dies geht jedoch wegen der 5. Feststellung <u>nicht</u>. Dies bedeutet: Die Bedingung $x-y-6=0$ liefert <u>keine</u> Lösung.

In **Teil 3** untersuchen wir die Bedingung $xy=1$. Wenn $xy=1$, dann $y=\frac{1}{x}$ und somit $y^{x-y} = x^6 y^4 = \frac{x^6}{x^4} = x^2$. Das Gleichungssystem kann man daher so schreiben: $\begin{cases} x^{x-y} = y^2 \\ y^{x-y} = x^2 \end{cases}$.

Wir teilen nun die erste Gleichung durch die zweite Gleichung. Es folgt:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{x-y} = \frac{y^2}{x^2} \text{ oder } \left(\frac{x}{y}\right)^{x-y} = \left(\frac{x}{y}\right)^{-2} \qquad (**)$$

Die Gleichung (**) kann auf zwei Arten erfüllt werden: $\frac{x}{y}=1$ oder $x-y=-2$. Wir untersuchen nun nach und nach beide Fälle.

<u>1.Fall</u>: $\frac{x}{y}=1$. Dann ist $x=y$. Aus $xy=1$ folgt $x=y=1$.

<u>2.Fall</u>: $x-y=-2$. Dann ist $y=x+2$. Aus $xy=1$ folgt $x(x+2)=1$ oder $x^2+2x-1=0$. Diese quadratische Gleichung hat als einzige positive Lösung $x=\sqrt{2}-1$. Aus $y=x+2$ folgt $y=\sqrt{2}+1$.

In **Teil 4** fassen wir die Ergebnisse zusammen und deuten diese. Das Gleichungssystem hat diese zwei Lösungen: $(1;1)$ und $(\sqrt{2}-1;\sqrt{2}+1)$. Bei der zweiten Lösung schätzen wir nun x und y: $x=\sqrt{2}-1<1{,}42-1=0{,}42<0{,}5<$ <1 und $y=\sqrt{2}+1>1{,}41+1=2{,}41>2$. Also gilt: $x < 0{,}5$, $x < 1$ und $y > 2$. $x>1$ bzw. $y < 1$ gelten daher nicht.

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, E

12. Wie viele Lösungen hat die Gleichung $n^3-n=n!$ insgesamt, wobei n eine natürliche Zahl ist?
Bemerkung: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (n-1)\cdot n$ und $0! = 1$.

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *3* **(E)** *Keine dieser Antworten.*

Lösung:
In **Teil 1** zeigen wir, dass $n = 0$ keine Lösung ist: $0^3-0=0$ aber $0! = 1$.
In **Teil 2** zeigen wir, dass $n = 1$ keine Lösung ist: $1^3-1=0$ aber $1! = 1$.
In **Teil 3** zeigen wir, dass $n = 2$ keine Lösung ist: $2^3-2=6$ aber $2! = 2$.
In **Teil 4** zeigen wir, dass $n = 3$ keine Lösung ist: $3^3-3=24$ aber $3! = 6$.
In **Teil 5** zeigen wir, dass $n = 4$ keine Lösung ist: $4^3-4=62$ aber $4! = 24$.
In **Teil 6** zeigen wir, dass $n = 5$ eine Lösung ist: $5^3-5=120$ und $5! = 120$.
Beachte: Daraus folgt, dass die Antwort (A) keine Lösung darstellt.
In **Teil 7** begründen wir, warum jedes n mit $n > 5$ keine Lösung darstellen kann. Im *1. Schritt* formen wir die Gleichung um. Wegen $n^3-n=n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)$ kann die Ausgangsgleichung so geschrieben werden $n\cdot(n-1)\cdot(n+1)=1\cdot 2\cdot 3...\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n$ (*)
Nun teilen wir (*) durch n und durch $(n-1)$. Letzteres ist möglich, da $n = 1$ keine Lösung ist und daher ist $n - 1$ nicht Null. Wir erhalten:
$n+1=1\cdot 2\cdot 3...\cdot(n-2)$ (**)
Feststellung: Wenn $n > 5$, dann ist $n+1<2(n-2)$. Begründung: Für $n > 5$ gilt $n+1<2n-4=2(n-2)$.
Aus der Feststellung folgt:
$n+1<(n-2)\cdot 2<1\cdot 2\cdot 3...\cdot(n-2)$ (***)
(**) und (***) schließen sich für $n > 5$ jedoch gegenseitig aus, denn: $n+1$ kann nicht sowohl gleich als auch kleiner sein als der Term $1\cdot 2\cdot 3...\cdot(n-2)$.
Daraus folgt, dass es für $n > 5$ keine Lösung gibt.
Fazit: Die einzige Lösung der Gleichung ist $n = 5$.

Die richtige(n) Antwort(en): B

13. Alle Felder eines 10×10 Schachbrettes wurden so gefärbt, dass sich in jeder Zeile und jeder Spalte höchstens 5 verschiedene Farben befinden. Insgesamt wie viele verschiedene Farben konnten dazu verwendet werden?

(A) *40* **(B)** *41* **(C)** *42* **(D)** *43* **(E)** *44*

Lösung: In **Teil 1** beweisen wir, dass **41** eine Lösung ist. Dazu geben wir ein Beispiel an (siehe Figur). Die ersten 40 Farben wurden von 1 bis 40 durchnummeriert, die leerstehenden Felder haben die 41-te Farbe:

1	2	3	4						
	5	6	7	8					
		9	10	11	12				
			13	14	15	16			
				17	18	19	20		
					21	22	23	24	
						25	26	27	28
32							29	30	31
35	36							33	34
38	39	40							37

In **Teil 2** zeigen wir, dass **40** eine Lösung ist. Beispiel: In der obigen Figur ersetzen wir Farbe 1 durch Farbe 2 (ansonsten ändern wir nichts).
In **Teil 3** zeigen wir, dass 42 keine Lösung ist.
1. Feststellung: In jeder Reihe gibt es höchstens 5 Farben.
2. Feststellung: In jeder Spalte gibt es höchstens 5 Farben.
Die Idee der Beweisführung für Teil 3: Wir untersuchen, was es bedeuten würde, wenn wir 42 Farben hätten. Unter dieser Annahme gilt:
3. Feststellung: Es gibt mindestens 2 Reihen mit je 5 (verschiedenen) Farben, die in keiner anderen Reihe vorkommen. Begründung: Wenn es in höchstens einer Reihe 5 Farben gäbe, dann hätten wir höchstens $9 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 41$ Farben verbraucht (in 9 Reihen höchstens 4 verschiedene Farben und in einer Reihe 5 Farben) – also weniger als 42.
4. Feststellung: In den 2 Reihen aus der 3. Feststellung gibt es genau 10 Farben (siehe 3. Feststellung).
5. Feststellung: Beide Reihen aus der 3. und 4. Feststellung sind je mit genau 5 verschiedenen Farben gefärbt.
6. Feststellung: In jeder Spalte haben die zwei Felder aus den 2 Reihen aus der 3. und 4. Feststellung unterschiedliche Farben.
7. Feststellung: In jeder der 10 Spalten können außer den 10 Farben aus der 4. Feststellung höchstens je 3 andere Farben auftreten (siehe 2. Feststellung).
8. Feststellung: In den 10 Spalten können höchstens $10 + 10 \cdot 3 = 40$ Farben auftreten (siehe 7. Feststellung).
Einerseits bilden die 10 Spalten die ganze Tabelle, andererseits ist 40 kleiner

als 42. Dies bedeutet, dass 42 keine Lösung sein kann.
Daraus folgt, dass 43 und 44 ebenfalls keine Lösungen sind.

Die richtige(n) Antwort(en): A, B

Aufgabe zur detaillierten Ausarbeitung:

14. Löse die Gleichung $\sqrt{x+9}+\sqrt{x}+\sqrt{x-9}=7$ (x ist eine reelle Zahl).

Lösung: Terme unter Quadratwurzeln dürfen nicht negativ sein (1 Punkt). Aus $x-9\geq 0$ folgt $x\geq 9$ (2 Punkte) und $\sqrt{x-9}\geq 0$ (1 Punkt). Damit ist $\sqrt{x}\geq\sqrt{9}=3$ (2 Punkte) und $\sqrt{x+9}\geq\sqrt{9+9}=\sqrt{9\cdot 2}=3\sqrt{2}$ (3 Punkte). Aus $\sqrt{x+9}\geq 3\sqrt{2}$, $\sqrt{x}\geq 3$ und $\sqrt{x-9}\geq 0$ folgt:

$$\sqrt{x+9}+\sqrt{x}+\sqrt{x-9}\geq 3\sqrt{2}+3+0>3\cdot 1{,}4+3+0=4{,}2+3=7{,}2>7$$

(4 Punkte). Wir haben also gezeigt, dass die linke Seite der Ausgangsgleichung stets größer als 7 ist (2 Punkte). Dies bedeutet: Die Gleichung $\sqrt{x+9}+\sqrt{x}+\sqrt{x-9}=7$ hat keine Lösung (1 Punkt). (Insgesamt maximal 16 Punkte.)