Lösungen – Klasse 10

1. Ein Baby liegt vor uns auf dem Bauch. Seine Füße zeigen zu uns, sein Kopf zeigt von uns weg. Es dreht sich entlang seiner Körperachse zunächst um 270° nach rechts, anschließend um 540° nach links. In welcher Lage befindet sich das Baby danach?

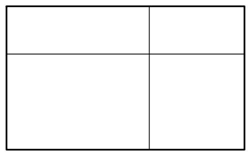
Bemerkung: „Nach rechts" und „nach links" gelten von uns aus gesehen.

(A) *Auf dem Bauch.* **(B)** *Auf dem Rücken.*
(C) *Auf seiner rechten Seite.* **(D)** *Auf seiner linken Seite.*
(E) *Keine dieser Antworten.*

Lösung: „Um 270° nach rechts, anschließend um 540° nach links" bedeutet insgesamt eine Drehung um 270° nach links. Es sind also drei 90° Drehungen nach links. Das Baby lag ursprünglich auf dem Bauch. Es drehte sich auf die linke Seite, dann auf den Rücken und schließlich auf die rechte Seite.

Die richtige(n) Antwort(en): C

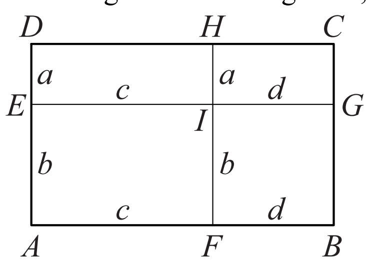
2. Ein Rechteck wurde in vier kleinere Rechtecke zerlegt. In der Figur kann man aber insgesamt 9 Rechtecke erkennen. Die Längen und die Breiten aller Rechtecke sind natürliche Zahlen (in cm). **Die Frage:** Wie viele Rechtecke kann es unter den 9 Rechtecken insgesamt geben, deren Flächeninhalt (in cm^2) eine ungerade Zahl ist?



(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *4* **(E)** *9*

Lösung: In **Teil 1** formulieren wir einige Feststellungen.
1. Feststellung: Das Produkt zweier ungerader Zahlen ist ungerade.
2. Feststellung: Das Produkt zweier gerader Zahlen ist gerade.
3. Feststellung: Das Produkt einer geraden und einer ungeraden Zahl ist gerade.

Daraus folgt:
4. Feststellung: Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist genau dann ungerade, wenn sowohl die Länge als auch die Breite ungerade Zahlen sind.



In **Teil 2** fertigen wir eine Figur an, führen Bezeichnungen ein und formulieren weitere Feststellungen.
5. Feststellung: Die 9 Rechtecke sind *AFIE*, *FBGI*, *EIHD*, *IGCH*, *AFHD*, *FBCH*, *ABGE*, *EGCD*, *ABCD*.
6. Feststellung: Die Flächeninhalte der 9 Rechtecke sind $b \cdot c$, $b \cdot d$, $a \cdot c$, $a \cdot d$, $c \cdot (a+b)$, $d \cdot (a+b)$, $b \cdot (c+d)$, $a \cdot (c+d)$ und $(a+b) \cdot (c+d)$.

In **Teil 3** finden wir die Lösungen. Dazu führen wir eine Fallunterscheidung durch. Die ersten drei Feststellungen wenden wir dabei stets an.

<u>1. Fall</u>: Alle vier Zahlen *a*, *b*, *c*, *d* sind ungerade. Dann sind alle Summen aus der 6. Feststellung gerade Zahlen. Die Flächeninhalte $b\cdot c$, $b\cdot d$, $a\cdot c$ und $a\cdot d$ sind ungerade, $c\cdot(a+b)$, $d\cdot(a+b)$, $b\cdot(c+d)$, $a\cdot(c+d)$ und $(a+b)\cdot(c+d)$ sind gerade. In diesem Fall gibt es also insgesamt **4** Rechtecke mit ungeradem Flächeninhalt.
<u>2. Fall</u>: Drei der Zahlen *a*, *b*, *c*, *d* sind ungerade, eine ist gerade. Es sei *d* die gerade Zahl. Dann ist $a + b$ gerade, $c + d$ ungerade. Die Flächeninhalte $b\cdot c$, $a\cdot c$, $a\cdot(c+d)$ und $b\cdot(c+d)$ sind ungerade, $a\cdot d$, $b\cdot d$, $c\cdot(a+b)$, $d\cdot(a+b)$ und $(a+b)\cdot(c+d)$ sind gerade. In diesem Fall gibt es also insgesamt **4** Rechtecke mit ungeradem Flächeninhalt.
<u>3. Fall</u>: Zwei der Zahlen *a*, *b*, *c*, *d* sind ungerade, zwei sind gerade. Hier gibt es zwei Möglichkeiten.
1. Möglichkeit: Die geraden Zahlen liegen auf derselben Seite des großen Rechtecks. Diese seien z. B. *a* und *b* (*c* und *d* sind somit ungerade). Dann sind $a + b$ und $c + d$ gerade. Daraus folgt. Alle 9 Flächeninhalte sind gerade, es gibt also bei der 1. Möglichkeit keine (**0**) ungerade Flächeninhalte.
2. Möglichkeit: Die geraden Zahlen liegen auf unterschiedlichen Seiten des großen Rechtecks. Diese seien z. B. *a* und *c* (*b* und *d* sind somit ungerade). Dann sind $a + b$ und $c + d$ ungerade. Die Flächeninhalte $b\cdot d$, und $b\cdot(c+d)$, $d\cdot(a+b)$, $(a+b)\cdot(c+d)$ sind ungerade, $a\cdot c$, $b\cdot c$, $a\cdot d$, $a\cdot(c+d)$, $c\cdot(a+b)$ sind gerade. Bei der 2. Möglichkeit gibt es also insgesamt **4** Rechtecke mit ungeradem Flächeninhalt.
<u>4. Fall</u>: Eine der Zahlen *a*, *b*, *c*, *d* ist ungerade, drei sind gerade.
Alle 9 Flächeninhalte sind gerade, da die Länge oder die Breite jedes der 9 Rechtecke eine gerade Zahl ist.
<u>5. Fall</u>: Alle vier Zahlen *a*, *b*, *c*, *d* sind gerade.
Alle 9 Flächeninhalte sind gerade Zahlen.
Sowohl im 4. Fall als auch im 5. Fall gibt es also **0** ungerade Flächeninhalte.

Die richtige(n) Antwort(en): A, D

3. Man möchte in mehreren Schritten von 1 bis zu den unten aufgeführten Zahlen gelangen. Die Startzahl 1 wird im ersten Schritt zunächst mit 2 multipliziert. Mit dem Ergebnis verfährt man dann im zweiten Schritt so: Entweder man multipliziert es mit 2 oder man addiert 1 dazu. Das Multiplizieren mit 2 ist stets möglich, die Addition von 1 ist jedoch nur dann erlaubt, wenn die Zahl, zu der man 1 addieren möchte, eine gerade Zahl ist. Alle weiteren Schritte erfolgen wie beim zweiten Schritt. **Die Frage:** Welche der unten aufgeführten Zahlen kann man damit in genau 7 Schritten erreichen?

(A) *27* **(B)** *48* **(C)** *50* **(D)** *54* **(E)** *72*

Lösung: Bei den nächsten Darstellungen steht „$\rightarrow$“ für „plus 1“ und „$\Rightarrow$“ für „mal 2“.
In **Teil 1** zeigen wir, dass **27** eine Lösung ist. Tatsächlich:
$1\Rightarrow 2\rightarrow 3\Rightarrow 6\Rightarrow 12\rightarrow 13\Rightarrow 26\rightarrow 27$. Es sind genau 7 Schritte.

In **Teil 2** zeigen wir, dass **50** eine Lösung ist. Tatsächlich:
$1 \Rightarrow 2 \rightarrow 3 \Rightarrow 6 \Rightarrow 12 \Rightarrow 24 \rightarrow 25 \Rightarrow 50$. Es sind genau 7 Schritte.
In **Teil 3** zeigen wir, dass **72** eine Lösung ist. Tatsächlich:
$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 8 \rightarrow 9 \Rightarrow 18 \Rightarrow 36 \Rightarrow 72$. Es sind genau 7 Schritte.
In **Teil 4** zeigen wir, dass 48 <u>keine</u> Lösung ist. Tatsächlich:
$1 \Rightarrow 2 \rightarrow 3 \Rightarrow 6 \Rightarrow 12 \Rightarrow 24 \Rightarrow 48$. Es sind aber 6, <u>keine</u> 7 Schritte.
Es lässt sich zeigen, dass der obige Weg der *einzige* ist, der zu 48 führt. Jeder anderer Versuch scheitert. Wir schildern dies an zwei Beispielen:
<u>Beispiel 1</u>: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 4 \rightarrow 5 \Rightarrow 10 \Rightarrow 20 \rightarrow 21 \Rightarrow 42$ führt nicht zu 48.
<u>Beispiel 2</u>: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 8 \Rightarrow 16 \rightarrow 17 \Rightarrow 34 \rightarrow 35$ führt nicht zu 48.
<u>Anregung</u>: Der geneigte Leser möge auch andere Wege prüfen.
In **Teil 5** zeigen wir, dass 54 <u>keine</u> Lösung ist. Tatsächlich:
$1 \Rightarrow 2 \rightarrow 3 \Rightarrow 6 \Rightarrow 12 \rightarrow 13 \Rightarrow 26 \rightarrow 27 \Rightarrow 54$. Es sind aber 8, <u>keine</u> 7 Schritte.
Es lässt sich zeigen, dass der obige Weg der *einzige* ist, der zu 54 führt.

Alternativlösung:
In **Teil 1** schreiben wir zunächst die Zahlen im Zweiersystem.
$27 = 11011_2$, $48 = 110000_2$, $50 = 110010_2$, $54 = 110110_2$, $72 = 1001000_2$
Wenn wir die Wege aus der vorherigen Lösung untersuchen, können wir mit etwas Glück eine Regel entdecken. Und zwar:
<u>Regel</u>: Eine 1 bedeutet „mal 2 und dann plus 1“, eine 0 bedeutet „mal 2“.
Dabei werden die Ziffern von links nach rechts betrachtet. Die erste Ziffer von links wird aber nicht berücksichtigt.
Wir schildern die Regel an einem <u>Beispiel</u>: $27 = 11011_2$. Die erste Ziffer wird ignoriert. Es bleibt 1011. Die 1 bedeutet: $1 \Rightarrow 2 \rightarrow 3$. Die 0 bedeutet: $3 \Rightarrow 6$. Die nächste 1 bedeutet: $6 \Rightarrow 12 \rightarrow 13$. Die letzte 1 bedeutet: $13 \Rightarrow 26 \rightarrow 27$. Zusammengefügt entsteht $1 \Rightarrow 2 \rightarrow 3 \Rightarrow 6 \Rightarrow 12 \rightarrow 13 \Rightarrow 26 \rightarrow 27$, 7 Schritte.
In **Teil 2** wenden wir die Regel für alle anderen aufgeführten Zahlen an.
$1 \Rightarrow 2 \rightarrow 3 \Rightarrow 6 \Rightarrow 12 \Rightarrow 24 \Rightarrow 48$, 6 Schritte
$1 \Rightarrow 2 \rightarrow 3 \Rightarrow 6 \Rightarrow 12 \Rightarrow 24 \rightarrow 25 \Rightarrow 50$, 7 Schritte
$1 \Rightarrow 2 \rightarrow 3 \Rightarrow 6 \Rightarrow 12 \rightarrow 13 \Rightarrow 26 \rightarrow 27 \Rightarrow 54$, 8 Schritte
$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 8 \rightarrow 9 \Rightarrow 18 \Rightarrow 36 \Rightarrow 72$, 7 Schritte
Es entstehen die bereits bekannten Wege aus der anderen Lösung.

Bemerkung: Jede natürliche Zahl kann im Zweiersystem geschrieben werden *und* diese Darstellung ist eindeutig. Dies bedeutet: Man kann zu jeder natürlichen Zahl gelangen.

Die richtige(n) Antwort(en): A, C, E

4. Für welche der aufgeführten Zahlen *n* lässt sich der Bruch $\frac{n^2+4}{n+3}$ kürzen?

(A) *10* **(B)** *30* **(C)** *207* **(D)** *998* **(E)** *2017*

Lösung: Wir prüfen nach und nach die aufgeführten Zahlen.

Für n = **10** ist $\frac{10^2+4}{10+3} = \frac{104}{13}$ = 8. Der Bruch ist also kürzbar durch 13.

Für n = 30 ist $\frac{30^2+4}{30+3} = \frac{904}{33}$. Der Bruch ist nicht kürzbar, denn 904 ist weder durch 3 noch durch 11 teilbar.

Für n = 207 ist $\frac{207^2+4}{207+3} = \frac{42853}{210}$. Der Bruch ist nicht kürzbar. Begründung: $210 = 2\cdot3\cdot5\cdot7$ und der Zähler ist weder teilbar durch 2 noch durch 3 noch durch 5 noch durch 7.

Für n = **998** ist $\frac{998^2+4}{998+3} = \frac{996008}{1001}$ und 1001 = $7\cdot11\cdot13$. Der Bruch ist kürzbar durch 13. Anregung: Der geneigte Leser möge es prüfen.

Für n = 2017 ist $\frac{2017^2+4}{2017+3} = \frac{4068293}{2020}$. Der Bruch ist nicht kürzbar. Begründung: 2020 = $2^2\cdot5\cdot101$ und der Zähler ist weder teilbar durch 2 noch durch 5 noch durch 101.

Die richtige(n) Antwort(en): A, D

5. Jede ganze Zahl wird entweder mit Rot oder mit Grün gefärbt. Man stellt fest: I. Die Differenz zweier roter Zahlen ist ungleich *d* (*d* ist eine natürliche Zahl) *und* II. Die Differenz zweier grüner Zahlen ist ungleich 1. **Die Frage:** Für welche der unten aufgeführten Zahlen *d* ist eine solche Färbung möglich?

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *6*

Lösung: In **Teil 1** gehen wir von einer Färbung aus, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt und formulieren einige Feststellungen.
Zwei aufeinanderfolgende Zahlen nennen wir auch benachbarte Zahlen.
1. Feststellung: Es gibt keine zwei benachbarten grünen Zahlen. Begründung: Sonst wäre ihre Differenz 1, was jedoch wegen II. nicht geht.
Daraus folgt:
2. Feststellung: Beide Nachbarzahlen einer grünen Zahl müssen rot sein.
3. Feststellung: Es gibt keine zwei benachbarten roten Zahlen. Tatsächlich: Wenn n und $n+1$ rot wären, dann müssten $n+d$ und $n+d+1$ beide grün sein (wegen I.). $n+d$ und $n+d+1$ sind aber benachbarte Zahlen, und die können laut 1. Feststellung nicht beide grün sein.
Aus der 1. und 3. Feststellung folgt:
4. Feststellung: Die Farben Rot und Grün müssen sich stets abwechseln.

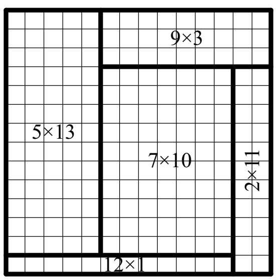
Festlegung: Wir färben nun die ungeraden Zahlen mit Rot, die geraden Zahlen mit Grün. Anschaulich: 1, *2*, 3, *4*, 5, *6*, 7, *8*, 9, *10*, … Die unterstrichenen Zahlen sind rot, die kursiv gedruckten grün.
Beachte: Umgekehrt (die ungeraden Zahlen sind grün, die geraden Zahlen rot) wäre auch möglich gewesen.
In **Teil 2** untersuchen wir die Färbung aus der Festlegung. Die folgenden Feststellungen beziehen sich auf diese Festlegung: 1, *2*, 3, *4*, 5, *6*, 7, *8*, 9, …
5. Feststellung: Die Differenz zweier roter Zahlen ist eine gerade Zahl.
6. Feststellung: Die Differenz zweier grüner Zahlen ist eine gerade Zahl.
3 und **5** sind Lösungen der Aufgabe. Die Eigenschaft I. ist erfüllt wegen der 5. Feststellung, die Eigenschaft II. stimmt wegen der 6. Feststellung.
2, 4 und 6 stellen keine Lösungen dar. Dies folgt aus der 5. Feststellung und aus der Eigenschaft I.

Die richtige(n) Antwort(en): B, D

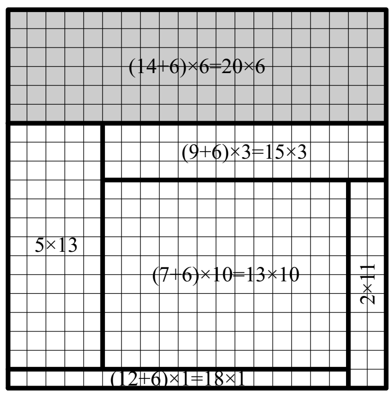
6. Julian zerlegt ein Quadrat in Rechtecke. Anschließend schreibt er die Längen und die Breiten aller dieser Rechtecke (in cm) auf. Er stellt fest: Alle Zahlen sind unterschiedlich. **Die Frage:** In insgesamt wie viele Rechtecke kann Julian das Quadrat zerlegt haben?

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *6*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **5** und **6** Lösungen darstellen. Dazu geben wir jeweils ein Beispiel an. *Figur 1* zeigt eine Zerlegung in 5 Rechtecke, *Figur 2* eine Zerlegung in 6 Rechtecke. Die Längen und die Breiten wurden in jedes Rechteck geschrieben. Alle Zahlen sind unterschiedlich.



Figur 1

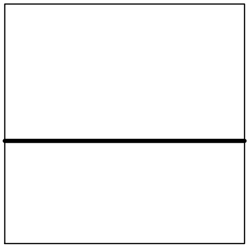


Figur 2

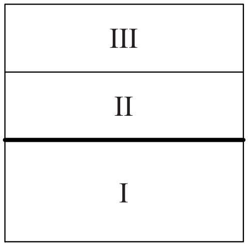
Bemerkung: *Figur 2* ist aus *Figur 1* entstanden, indem wir diese durch das schraffierte Rechteck ergänzt haben. Da so die Breite um 6 erhöht wurde, mussten wir auch die Länge um 6 cm erhöhen (damit es ein Quadrat bleibt).
In beiden Figuren sind alle Schnitte parallell zu einer Seite des Quadrates. Dies ist kein Zufall, sondern es gilt allgemein:
Feststellung: Jeder Schnitt verläuft parallel zu einer Seite des Quadrates (denn nur so können wir lauter Rechtecke erhalten).

Im Folgenden setzen wir diese Feststellung stets voraus.

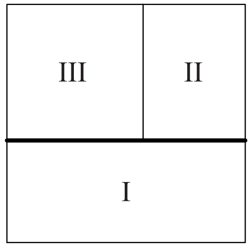
In **Teil 2** zeigen wir, dass 2 keine Lösung darstellt. Begründung: Die fett gezeichnete Linie in *Figur 3* ist eine gemeinsame Seite der zwei Rechtecke. Deren Länge schreibt Julian zweimal auf: Einmal für das eine, einmal für das andere Rechteck. Dies geht aber nicht, da alle Zahlen unterschiedlich sein müssen.



Figur 3



Figur 4



Figur 5

In **Teil 3** zeigen wir, dass 3 keine Lösung darstellt. Denn: Ein Quadrat kann auf zwei Arten in 3 Rechtecke zerlegt werden (siehe *Figur 4* und *Figur 5*).

In beiden Fällen gibt es aber (mindestens) eine gemeinsame Seite (in *Figur 4* z. B. die fett gezeichnete Linie, in *Figur 5* die senkrechte Linie in der Mitte). Dies geht aber nicht, da alle Zahlen unterschiedlich sein müssen.

In **Teil 4** zeigen wir, dass 4 keine Lösung darstellt. Begründung: Zunächst zerlegen wir das Quadrat in zwei Rechtecke (siehe noch einmal *Figur 3*). Um insgesamt 4 Rechtecke zu erhalten, haben wir nun zwei Möglichkeiten:

1. Fall: Wir zerlegen jedes der Rechtecke in zwei Rechtecke.

2. Fall: Wir zerlegen eines der Rechtecke in drei Rechtecke.

Der 1. Fall liefert keine Lösung. Dies wurde in Teil 2 begründet.

Der 2. Fall liefert ebenfalls keine Lösung. Dies wurde in Teil 3 begründet.

Die richtige(n) Antwort(en): D, E

7. Das Gleichungssystem $\begin{cases} x^2 + xy + x = 10 \\ y^2 + xy + y = 20 \end{cases}$ (mit x, y reelle Zahlen) hat eine Lösung $(x\,;y)$, für die gilt:

(A) $y < -2$ **(B)** $-2 \le y < 0$ **(C)** $0 \le y < 2$ **(D)** $2 \le y < 6$ **(E)** $6 \le y$

Lösung: In **Teil 1** lösen wir das Gleichungssystem. Im *1. Schritt* addieren wir die zwei Gleichungen. Wir erhalten: $x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 30$

Nebenrechnung: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Daraus folgt:

$(x+y)^2 + (x+y) - 30 = 0$. Es ist eine quadratische Gleichung für $x+y$.

Im *2. Schritt* lösen wir diese quadratische Gleichung mit der abc-Formel.

$$(x+y)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-30)}}{2} = \frac{-1 \pm 11}{2}.$$

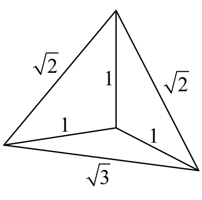
Also $x + y = -6$ oder $x + y = 5$.
Im *3. Schritt* führen wir eine Fallunterscheidung durch.
1. Fall: $x + y = -6$, also $y = -6 - x$. Eingesetzt in die erste Gleichung:
$x^2 + x(-6 - x) + x = 10 \Leftrightarrow x^2 - 6x - x^2 + x = 10 \Leftrightarrow -5x = 10$
Somit ist $x = -2$ und $y = -4$. Der 1. Fall liefert die Lösung $(-2; -4)$.
2. Fall: $x + y = 5$, also $y = 5 - x$. Eingesetzt in die erste Gleichung:
$x^2 + x(5 - x) + x = 10 \Leftrightarrow x^2 + 5x - x^2 + x = 10 \Leftrightarrow 6x = 10$
Somit ist $x = \frac{5}{3}$ und $y = \frac{10}{3}$. Der 2. Fall liefert die Lösung $\left(\frac{5}{3}; \frac{10}{3}\right)$.
In **Teil 2** untersuchen wir die Lösungen aus Teil 1.
(A) ist eine Lösung, denn $-4 < -2$.
(D) ist eine Lösung, denn $2 \leq \frac{10}{3} < 6$.
(B), (C) und (E) sind keine Lösungen, denn weder $y = -4$ noch $y = \frac{10}{3}$ erfüllt diese Ungleichungen.

Die richtige(n) Antwort(en): A, D

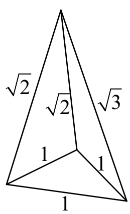
8. Eine dreiseitige Pyramide hat die Kantenlängen 1; 1; 1; $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$. Anna schraffiert alle Seitenflächen der Pyramide, die rechtwinklige Dreiecke sind. Wie viele Seitenflächen konnte Anna insgesamt schraffiert haben?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *3* **(E)** *4*

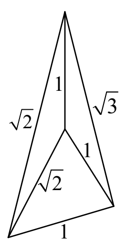
Lösung: In **Teil 1** finden wir alle möglichen Pyramiden. Unser Ansatz ist die gegenseitige Lage der drei Kanten mit der Länge 1. In *Figur 1* haben sie einen gemeinsamen Eckpunkt, in *Figur 2* bilden sie ein gleichseitiges Dreieck, in *Figur 3* und *Figur 4* haben sie nur paarweise gemeinsame Eckpunkte. Das systematische Probieren ergibt die vier Pyramiden aus den Figuren.
Bemerkung: Pyramiden, die durch Spiegelungen oder Drehungen aus den vier abgebildeten Pyramiden entstehen, wurden nicht berücksichtigt.
Beachte: *Figur 3* und *Figur 4* sind unterschiedlich, denn bei *Figur 3* gibt es eine Seitenfläche mit $(1; 1; \sqrt{3})$, bei *Figur 4* nicht.



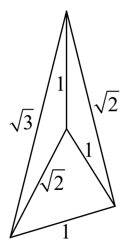
Figur 1



Figur 2



Figur 3



Figur 4

In **Teil 2** untersuchen wir, welche der entstandenen Dreiecke rechtwinklig sind. Dazu wenden wir den Kehrsatz des Satzes von Pythagoras an.

Beispiel 1: Ein Dreieck $\left(1;\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ ist rechtwinklig, da $1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$.

Beispiel 2: Ein $\left(1;\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ Dreieck ist nicht rechtwinklig wegen $1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2\neq\left(\sqrt{2}\right)^2$.

Im Folgenden fassen wir die Ergebnisse zusammen, ohne Nebenrechnungen durchzuführen. Der geneigte Leser möge einige Dreiecke selbst prüfen.

Figur 1: Rechtwinklig sind: $\left(1;1;\sqrt{2}\right)$ und $\left(1;1;\sqrt{2}\right)$, also **2** Seitenflächen.

Nicht rechtwinklig sind: $\left(1;1;\sqrt{3}\right)$ und $\left(\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$.

Figur 2: Rechtwinklig sind: $\left(1;\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ und $\left(1;\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$, **2** Seitenflächen.

Nicht rechtwinklig sind: $\left(1;1;1\right)$ und $\left(1;\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

Figur 3: Rechtwinklig sind: $\left(1;1;\sqrt{2}\right)$ und $\left(1;\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$, **2** Seitenflächen.

Nicht rechtwinklig sind: $\left(1;1;\sqrt{3}\right)$ und $\left(1;\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

Figur 4: $\left(1;1;\sqrt{2}\right)$, $\left(1;1;\sqrt{2}\right)$, $\left(1;\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ und $\left(1;\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ sind alle rechtwinklig, also **4** Seitenflächen.

Die richtige(n) Antwort(en): C, E

9. Alle Winkelweiten eines Dreiecks sind Primzahlen (in Grad gemessen). Wie viele solche Dreiecke gibt es insgesamt?
1. Bemerkung: Die Reihenfolge der drei Primzahlen spielt keine Rolle.
2. Bemerkung: Eine Primzahl hat genau 2 Teiler: Die 1 und sich selbst.

(A) *4* **(B)** *5* **(C)** *6* **(D)** *7* **(E)** *8*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass eine der drei Winkelweiten 2 sein muss. Begründung: 2 ist die einzige gerade Primzahl. Wenn keine der drei Winkelweiten 2 wäre, dann wären alle drei Winkelweiten ungerade Zahlen. Die Summe dreier ungerader Zahlen ist ungerade. Dies geht aber nicht, denn die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180° (also eine gerade Zahl).
Feststellung: Die anderen zwei Winkelweiten ergeben insgesamt 178. (*)
In **Teil 2** ermitteln wir alle Lösungen. Unser Ansatz ist die Feststellung (*). Wir arbeiten mit systematischem Probieren. In jeder Spalte ist die Summe der zwei Zahlen 178. Die Zahlen aus den oberen Reihen sind die Primzahlen in steigender Reihenfolge. Wir haben jene Spalten markiert, bei denen die untere Zahl ebenfalls eine Primzahl ist. Da die Reihenfolge keine Rolle spielt, befinden sich in den oberen Reihen die kleineren Zahlen.

3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
175	173	171	167	165	161	159	155	149	147	141

41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89
137	135	131	125	119	117	111	107	105	99	95	89

175 ist keine Primzahl, da sie durch 5 teilbar ist. 171 ist keine Primzahl, da sie durch 3 teilbar ist. 161 = 7 · 23 und ist ebenfalls keine Primzahl.
Anregung: Der geneigte Leser möge weitere Zahlen prüfen.
Das Zusammenzählen ergibt insgesamt **7** Lösungen.

Die richtige(n) Antwort(en): D

10. Die natürliche Zahl *n* heißt *darstellbar*, wenn es (nicht unbedingt verschiedene) natürliche Zahlen *a, b, c* gibt, die paarweise teilerfremd sind und für die gilt $n = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$.

Frage: Welche der unten aufgeführten Zahlen sind darstellbar?
Bemerkung: Zwei natürliche Zahlen sind teilerfremd, wenn sie keinen echten gemeinsamen Teiler haben. Beispiel: 4 und 15 (die echten Teiler von 4 sind 2 und 4, die echten Teiler von 15 sind 3, 5 und 15). Gegenbeispiel: 6 und 21, denn sie haben als echten gemeinsamen Teiler die 3.

(A) *8* **(B)** *9* **(C)** *10* **(D)** *11* **(E)** *12*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **8** darstellbar ist. Tatsächlich:
Für $a=1$, $b=1$ und $c=1$ gilt $\frac{(1+1)(1+1)(1+1)}{1\cdot 1\cdot 1} = \frac{2\cdot 2\cdot 2}{1} = \mathbf{8}$.
In **Teil 2** zeigen wir, dass **9** darstellbar ist. Tatsächlich:
Für $a=1$, $b=1$ und $c=2$ gilt $\frac{(1+1)(1+2)(2+1)}{1\cdot 1\cdot 2} = \frac{2\cdot 3\cdot 3}{2} = \mathbf{9}$.
In **Teil 3** zeigen wir, dass **10** darstellbar ist. Tatsächlich:
Für $a=1$, $b=2$ und $c=3$ gilt $\frac{(1+2)(2+3)(3+1)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{3\cdot 5\cdot 4}{6} = \mathbf{10}$.
In **Teil 4** zeigen wir, dass weder 11 noch 12 darstellbar sind. Dazu formulieren wir eine allgemeine Behauptung, und zwar:
Behauptung: Die einzigen darstellbaren Zahlen sind 8, 9 und 10.
Beweis: Im *1. Schritt* führen wir eine Bezeichnung ein und formulieren einige aus der Theorie bekannte Feststellungen.
$k \mid m$ bedeutet, dass die natürliche Zahl *k* die natürliche Zahl *m* teilt.
1. Feststellung: Zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind teilerfremd.
2. Feststellung: Wenn *a*, *b*, *c* paarweise teilerfremd sind, dann sind *c* und $b+c$ bzw. *c* und $c+a$ ebenfalls teilerfremd.
Im *2. Schritt* untersuchen wir den Fall, dass alle drei Zahlen *a*, *b*, *c* gleich sind. Da sie zu zweit teilerfremd sind, folgt *a* = *b* = *c* = 1. Dies führt zu n = 8,

siehe Teil 1.
Im *3. Schritt* untersuchen wir den Fall, dass es unter den drei Zahlen *a*, *b* und *c* genau zwei gleiche gibt. Es sei z. B. $a=b$. Da *a* und *b* teilerfremd sind, folgt $a=b=1$. Eingesetzt in $n=\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ erhalten wir die Gleichung $nc=2\cdot(1+c)(1+c)$. Wegen der 1. Feststellung sind *c* und $1+c$ teilerfremd. Daher muss *c* ein Teiler von 2 sein, also 1 oder 2. Wenn $c=1$, dann ist $n=8$ und wenn $c=2$, dann ist $n=9$.
Im *4. Schritt* untersuchen wir den Fall, dass unter den drei Zahlen *a*, *b* und *c* keine zwei gleich sind. Es sei z. B. $a<b<c$.

$$n=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \Leftrightarrow nabc=(a+b)(b+c)(c+a) \qquad (*)$$

Aus (*) und der 2. Feststellung folgt $c\,|\,(a+b)$, d. h. $a+b=mc$ mit $m\in\mathbb{N}$ und $b\,|\,(a+c)$, d. h. $a+c=kb$ mit $k\in\mathbb{N}$.
Aus $a<b<c$ folgt $a+b<2c$. Wegen $a+b=mc$ ist $m=1$ und $a+b=c$.
Aus $a+c=kb$ und $a+b=c$ folgt $a+b=kb-a$, also $2a=b(k-1)$. (**)
Da *a* und *b* teilerfremd sind, gilt $b\,|\,2$. Wegen $1\le a<b$ ergibt sich $b=2$, $a=1$ und $c=3$, also $n=10$ (siehe Teil 3).
Damit ist die Behauptung bewiesen. Daraus folgt, dass 11 und 12 <u>keine</u> Lösungen darstellen.

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C

11. In einem Klassenzimmer befinden sich einige Schüler (alle sind gleichaltrig) und ein Lehrer. Es ist bekannt:
I**.** Der Lehrer ist um 24 Jahre älter als ein Schüler *und*
II. Das Alter des Lehrers ist um 20 Jahre größer als das Durchschnittsalter aller Personen im Klassenzimmer. **Die Frage:** Wie viele Schüler können sich insgesamt im Klassenzimmer befinden?

(A) *5* **(B)** *10* **(C)** *16* **(D)** *20* **(E)** *28*

Lösung: In **Teil 1** führen wir Bezeichnungen ein und stellen Gleichungen auf. Die Gesamtzahl der Schüler sei *n*, das Alter des Lehrers *l* und das Alter eines Schülers *s*. Aus I. folgt $l=s+24$ (*). II. bedeutet $l=\dfrac{ns+l}{n+1}+20$ (**).
In **Teil 2** ermitteln wir *n*. Zunächst formen wir die Gleichung (**) um:
$l(n+1)=ns+l+20(n+1)$ oder $ln+l=ns+l+20(n+1)$
oder noch $n(l-s)=20(n+1)$ (***).
Aus (*) folgt $l-s=24$. Eingesetzt in (***) erhalten wir:
$24n=20n+20$, also *n* = **5**.
In **Teil 3** prüfen wir, ob mit *n* = 5 eine Lösung möglich ist. Nehmen wir dazu

an: Die Schüler sind 10 Jahre alt, der Lehrer ist 34 Jahre alt.
I. ist erfüllt. Nun prüfen wir II. Das Durchschnittsalter aller Personen aus dem Raum beträgt $\frac{5 \cdot 10 + 34}{6} = 14$ Jahre und 34 ist um 20 größer als 14.
<u>Bemerkung</u>: l und s lassen sich nicht eindeutig bestimmen. Für l und s passen alle (sinnvollen) Zahlen, deren Differenz 24 beträgt.
<u>Anregung</u>: Der geneigte Leser möge dies an einem anderen Beispiel prüfen.

Die richtige(n) Antwort(en): A

12. Die Summe von acht reellen Zahlen ist $\frac{4}{3}$ *und* eine beliebige Summe von sieben dieser Zahlen ist stets positiv.
Die Frage: Welche ist die kleinste ganze Zahl, die unter den acht Zahlen vorkommen kann?

(A) *–9* **(B)** *–7* **(C)** *–5* **(D)** *–3* **(E)** *–1*

Lösung: In **Teil 1** führen wir Bezeichnungen ein und formulieren einige Feststellungen. Die acht Zahlen seien $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ und wir nehmen ferner an, dass die Zahlen in aufsteigender Reihenfolge sind, also $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_8$.

<u>1. Feststellung</u>: $a_1 + a_2 + ... + a_8 = \frac{4}{3}$

<u>2. Feststellung</u>: $a_8 > 0$. Denn: Ansonsten wäre $a_1 + a_2 + ... + a_7$ nicht positiv.

<u>3. Feststellung</u>: $a_8 < \frac{4}{3}$. Dies folgt aus $a_1 + a_2 + ... + a_7 > 0$ sowie aus der 1. Feststellung.
In **Teil 2** ermitteln wir die kleinste negative Zahl, die in Frage kommt.
Aus $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_8$ folgt:

$a_2 + a_3 + ... + a_7 \leq 6a_8 < 6 \cdot \frac{4}{3} = 8$, also $a_2 + a_3 + ... + a_7 < 8$ (*)

Andererseits ist $a_1 + a_2 + ... + a_7 > 0$ (**)
Aus (*) und (**) folgt $a_1 > -8$. Beschränken wir uns für a_1 auf ganze Zahlen, so ist $a_1 = -7$ die kleinste für a_1 in Frage kommende Zahl.
In **Teil 3** zeigen wir, dass **–7** als kleinster Wert tatsächlich möglich ist. Dazu geben wir ein Beispiel an: $a_1 = -7$ und $a_2 = a_3 = ... = a_8 = \frac{25}{21}$.

Die Summe der acht Zahlen ist $-7 + 7 \cdot \frac{25}{21} = 7 \cdot \left(-1 + \frac{25}{21}\right) = 7 \cdot \frac{4}{21} = \frac{4}{3}$, die erste Bedingung ist erfüllt. Wir berechnen nun die kleinste Summe, die aus sieben Zahlen entstehen kann: $a_1 + a_2 + ... + a_7 \ = \ -7 + 6 \cdot \frac{25}{21} = \frac{50}{7} - 7 > 0$.

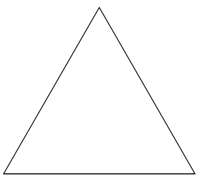
Da die kleinste Summe aus sieben Zahlen positiv ist, müssen alle anderen Summen aus sieben Zahlen ebenso positiv sein. Die zweite Bedingung ist also auch erfüllt.

Die richtige(n) Antwort(en): B

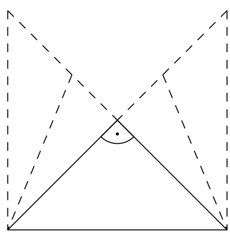
13. Gegeben ist ein Dreieck *ABC* (zeichnerisch). Daniel möchte im Äußeren des Dreiecks auf alle denkbaren Arten weitere Dreiecke zeichnen, so dass gilt: Das Ausgangsdreieck und ein weiteres Dreieck bilden zusammen ein gleichschenkliges Dreieck. Wie viele weitere unterschiedliche Dreiecke kann Daniel insgesamt zeichnen?
Bemerkung: Zwei Dreiecke gelten dann als unterschiedlich, wenn ihre Lagen unterschiedlich sind.

(A) *0* **(B)** *4* **(C)** *6* **(D)** *7* **(E)** *9*

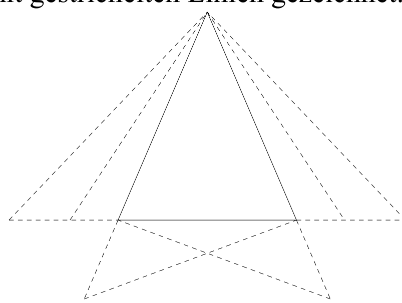
Lösung: Alle fünf Antworten stellen Lösungen dar. Wir schildern dies an passenden Beispielen. Das Ausgangsdreieck wurde mit durchgezogener Linie gezeichnet, die anderen Dreiecke wurden mit gestrichelten Linien gezeichnet.



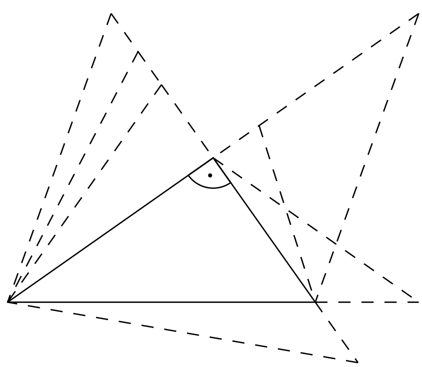
0 Dreiecke



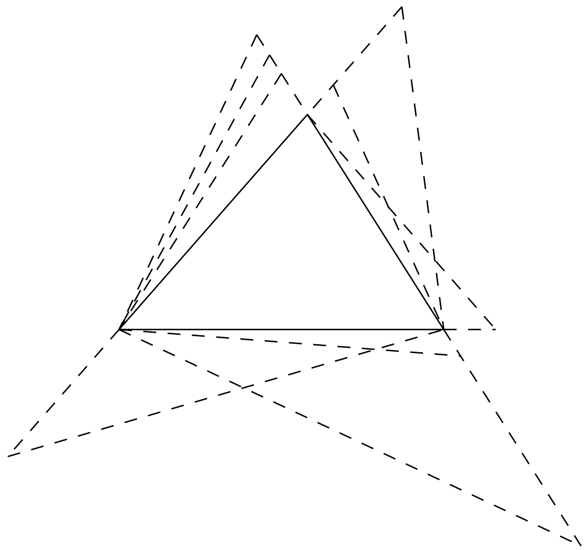
4 Dreiecke



6 Dreiecke



7 Dreiecke



9 Dreiecke

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C, D, E

Aufgabe zur detaillierten Ausarbeitung:

14. „Das Produkt dreier natürlicher Zahlen ist 36.“ sagt Peter und fragt Bea: „Um welche Zahlen handelt es sich?“ Bea überlegt kurz und antwortet: „Das sind zu wenig Angaben.“ Daraufhin teilt Peter Bea auch die Summe der drei Zahlen mit. Bea erwidert: „Die Angaben reichen immer noch nicht aus, um die Frage beantworten zu können.“ **Die Frage:** Welche Summe hat Peter Bea mitgeteilt? Begründet eure Antwort!
Bemerkung: Die drei natürlichen Zahlen müssen nicht unterschiedlich sein.

Lösung: Peter sagte Bea, dass die Summe der drei Zahlen 13 ist (2 Punkte). Begründung: 36 kann man auf acht Arten als Produkt dreier natürlicher Zahlen darstellen: $1\cdot1\cdot36$, $1\cdot2\cdot18$, $1\cdot3\cdot12$, $1\cdot4\cdot9$, $1\cdot6\cdot6$, $2\cdot2\cdot9$, $2\cdot3\cdot6$, $3\cdot3\cdot4$ (für jedes Produkt 1 Punkt). Daher kann Bea nicht sofort wissen, welche Zahlen Peter meint. Die Summe der drei Zahlen in den obigen Produkten ist, der Reihe nach, 38, 21, 16, 14, 13, 13, 11, 10 (2 Punkte). 13 ist die einzige Summe, die zweimal vorkommt (2 Punkte). Deswegen kann Bea nicht wissen, ob die drei Zahlen 1, 6, 6 oder 2, 2, 9 sind (2 Punkte). Alle anderen Summen kommen bei nur genau einem Produkt vor. Daher musste Peter als Summe 13 gesagt haben. (Insgesamt maximal 16 Punkte.).