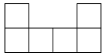
12. Ein Quader hat als Grundfläche das Quadrat *ABCD*. Der Quader hat somit nur zwei unterschiedliche Kantenlängen. Die eine beträgt 6 cm und die andere 8 cm. Eine Ebene *H* geht durch die Kante *DC*. Der Quader wird auf diese Ebene senkrecht projiziert. Wie viele cm^2 kann das Maximum des Flächeninhalts der Projektion betragen?
<u>Bemerkung</u>: Durch jeden Punkt des Quaders wird eine zu *H* senkrechte Gerade gelegt. Ihre Schnittpunkte mit *H* (Lotfußpunkte) bilden die Projektionsfläche.

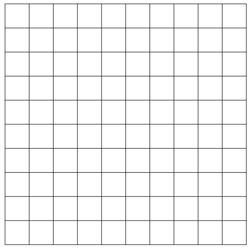
(A) *36* **(B)** *60* **(C)** *64* **(D)** *80* **(E)** *100*

13. Eine dreiseitige Pyramide hat die Kantenlängen 1; 1; 1; $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$. Anna schraffiert alle Seitenflächen der Pyramide, die rechtwinklige Dreiecke sind. Wie viele Seitenflächen konnte Anna insgesamt schraffiert haben?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *3* **(E)** *4*

Löst die folgende Aufgabe an der angegebenen Stelle des Antwortblattes!

14. Eure Aufgabe besteht darin, auf das 10×10 Brett 12, 13, 14, 15 oder 16 gleiche Figuren der Form  zu legen. Es darf keine Überlappungen geben *und* keine der Figuren darf über das Brett hinausragen (es dürfen aber Felder übrig bleiben, die nicht abgedeckt werden). Zeichnet nur jenes Brett ab, das die meisten Figuren verwendet (12, 13, 14, 15 oder 16).
<u>Beachte</u>: Je mehr Figuren eure Lösung hat, desto mehr Punkte ist sie wert.



Die Aufgaben, deren Lösungen und die Ergebnisse des Wettbewerbs von den Schuljahren 2014/2015 bis 2016/2017 sind als Buch erschienen. Alle Lösungen wurden schülerfreundlich und ausführlich gestaltet. Das Buch kann unter <u>www.bolyaiteam.de</u> / <u>www.bolyaiteam.at</u> bestellt werden.

„Als Gehirnforscher wünsche ich allen Menschen, dass wir trotz stark wachsender Informationsflut die Fähigkeit bewahren, auf unsere innere Stimme zu hören. Nur so können wir durch Kreativität und durch den Geist der Zusammenarbeit unsere Wünsche verwirklichen und dem Gemeinwohl dienen."

Prof. Dr. Freund Tamás
Mitglied der Leopoldina, der Nationalen Akademie der Wissenschaften, Vizepräsident der Ungarischen Akademie, Förderer des Wettbewerbs

BOLYAI MATHEMATIK TEAMWETTBEWERB®


C. F. GAUSS

2018
1. RUNDE
KLASSE 12


J. BOLYAI

Förderer des Wettbewerbs:
Prof. Dr. Freund Tamás
Mitglied der Leopoldina, der Nationalen Akademie der Wissenschaften, Vizepräsident der Ungarischen Akademie

Begründer des Wettbewerbs und Ersteller der Aufgaben:
Nagy-Baló András, *Mathematiklehrer*

Übersetzer der Aufgaben:
Attila Furdek, *Mathematiklehrer*

Lektoren der Übersetzung:
Matthias Benkeser, *Mathematiklehrer*

Koordinatorin:
Rita Feser, *Mathematiklehrerin*

Betreiber der Homepage und des informatischen Systems:
Georg Probst, *Informatiker*
Tassy Gergely, *Mathematiklehrer*

www.bolyaiteam.de / www.bolyaiteam.at

Markiert die Lösungen der Aufgaben 1-13 auf dem Antwortblatt mit X. Bei den Aufgaben können auch mehrere richtige Antworten vorkommen.

1. Jemand hat einige Kreisscheiben auf einen Tisch gelegt. Jede Kreisscheibe berührt genau drei andere Kreisscheiben. Wie viele Kreisscheiben können insgesamt auf dem Tisch liegen?

(A) *4* **(B)** *5* **(C)** *6* **(D)** *7* **(E)** *8*

2. Die Anzahl der positiven Teiler einer natürlichen Zahl n sei $d(n)$. Welche der aufgezählten Aussagen trifft zu?
Bemerkung: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$. Beispiel: $6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6$.

(A) $d(3!)=2^2$ **(B)** $d(4!)=2^3$ **(C)** $d(5!)=2^4$ **(D)** $d(6!)=2^5$ **(E)** $d(7!)=2^6$

3. Bea berechnet die Quersumme einer Quadratzahl. Welches Ergebnis kann sie erhalten?
1. Bemerkung: Quadratzahlen sind die Zahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36... usw.
2. Bemerkung: Die Quersumme einer Zahl ist die Summe ihrer Ziffern.

(A) *15* **(B)** *16* **(C)** *17* **(D)** *18* **(E)** *19*

4. 1/3 der Einwohner einer Ortschaft sind Frauen, 2/3 sind Männer. Die Frauen kaufen jede Woche 4/5 des in der Ortschaft verkauften Kefirs. Durch statistische Erhebungen wurde genau ermittelt, wie viel Kefir Frauen und wie viel Kefir Männer wöchentlich im Schnitt kaufen. **Die Frage**: Das wievielfache des Durschnittwerts der Männer ergibt den Durschnittwert der Frauen?
Bemerkungen: Die Durchschnittswerte berechnet man, indem man die Gesamtzahl des wöchentlich von Frauen bzw. Männer gekauften Kefirs durch die Gesamtzahl der Frauen bzw. Männer teilt.

(A) *3-fache* **(B)** *4-fache* **(C)** *6-fache* **(D)** *8-fache* **(E)** $\frac{4}{15}$*-fache*

5. Wie viele ganze Lösungen hat die Ungleichung $x^2 < 1 - 2\sin(2x)$ insgesamt?
Bemerkung: x ist im Bogenmaß angegeben.

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *3* **(E)** *4*

6. Eine natürliche Zahl n heißt *Grundzahl*, wenn jede natürliche Zahl kleiner als n als Summe von Teilern von n dargestellt werden kann. Beispiel: 6 ist eine Grundzahl, denn $1=1$, $2=2$, $3=3$, $4=3+1$ und $5=3+2$.
Welche der folgenden Zahlen ist eine Grundzahl?
Bemerkung: In jeder der Summen darf jeder Teiler höchstens einmal vorkommen.

(A) *3* **(B)** *8* **(C)** *12* **(D)** *48* **(E)** *144*

7. Ein 18 mm × 12 mm Rechteck wurde in drei Rechtecke zerlegt. Alle drei Rechtecke haben denselben Umfang. Wie viele mm lang kann ein solcher Umfang sein?

(A) *10* **(B)** *33* **(C)** *36* **(D)** *39* **(E)** *44*

8. Für die reellen Zahlen x und y gilt $\frac{xy}{x^2+6y^2} = \frac{1}{5}$. Welche Werte kann der Term $\frac{xy}{x^2-6y^2}$ annehmen?

(A) *−2* **(B)** *−1* **(C)** *1* **(D)** *2* **(E)** *Keine dieser Antworten.*

9. Die Städte A und B sind 130 km voneinander entfernt. Drei Personen wollen von A nach B gelangen. Sie haben nur einen Roller zur Verfügung, auf dem höchstens zwei Personen Platz haben. Der Roller fährt mit der Geschwindigkeit 50 km/h. Jede Person legt zu Fuß 5 km in der Stunde zurück. In wie vielen Stunden können alle drei Personen von A nach B kommen?
Bemerkungen: Die Städte A und B sind durch eine gerade Straße verbunden. Die drei Personen können frei darüber entscheiden, wer wann mit dem Roller fährt oder zu Fuß geht. Die Zeiten für die Beschleunigung auf 50 km/h, für Anhalten, Aufsteigen und Absteigen sind zu vernachlässigen.

(A) *5,8* **(B)** *6,2* **(C)** *6,5* **(D)** *6,8* **(E)** *7,2*

10. Die Summe von acht reellen Zahlen ist $\frac{4}{3}$ *und* eine beliebige Summe von sieben dieser Zahlen ist stets positiv.
Die Frage: Welche ist die kleinste ganze Zahl, die unter den acht Zahlen vorkommen kann?

(A) *−9* **(B)** *−7* **(C)** *−5* **(D)** *−3* **(E)** *−1*

11. Peter baut aus kleinen Würfeln mit der Kantenlänge 1 cm einen Quader. Diesen Quader kann er anschließend mit drei quadratischen Flächen komplett bekleben (ohne Überlappungen), wobei alle drei quadratischen Flächen ganzzahlige Seitenlängen in cm haben. **Die Frage**: Wie viele Würfel mit der Kantenlänge 1 cm kann Peter insgesamt verwendet haben?
Bemerkungen: Unter den drei quadratischen Flächen können auch gleich große vorkommen. Die Quadrate dürfen nicht zerschnitten werden. Von den drei Quadraten bleibt nach dem Bekleben nichts übrig.

(A) *2* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *24* **(E)** *32*

Achtung! Aufgaben 12-14 folgen auf der nächsten Seite.