11. Für das Gleichungssystem $\begin{cases} x^{x-y} = y^2 \\ y^{x-y} = x^6 y^4 \end{cases}$ mit $x > 0$, $y > 0$ lässt sich eine Lösung $(x;\, y)$ finden, für die gilt:

(A) $x < \frac{1}{2}$ **(B)** $x < 1$ **(C)** $x > 1$ **(D)** $y < 1$ **(E)** $y > 2$

12. Wie viele Lösungen hat die Gleichung $n^3 - n = n!$ insgesamt, wobei n eine natürliche Zahl ist?
Bemerkung: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ und $0! = 1$.

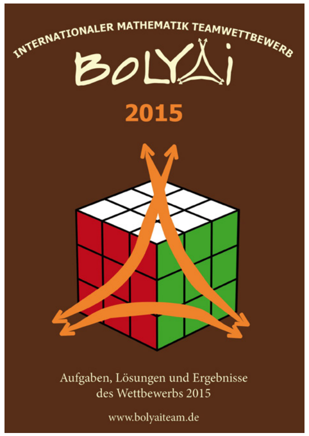
(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *3* **(E)** *Keine dieser Antworten.*

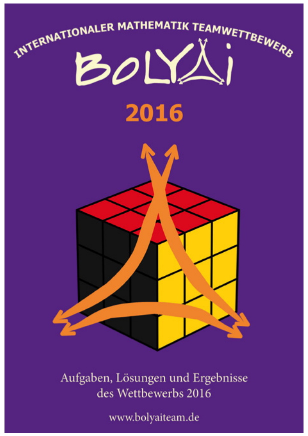
13. Alle Felder eines 10×10 Schachbrettes wurden so gefärbt, dass sich in jeder Zeile und jeder Spalte höchstens 5 verschiedene Farben befinden. Insgesamt wie viele verschiedene Farben konnten dazu verwendet werden?

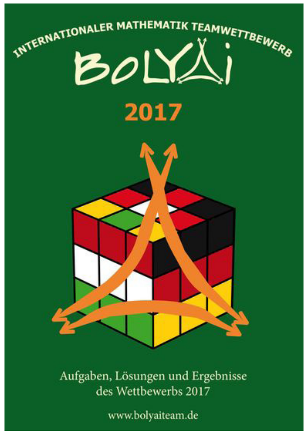
(A) *40* **(B)** *41* **(C)** *42* **(D)** *43* **(E)** *44*

Löst die folgende Aufgabe an der angegebenen Stelle des Antwortblattes!

14. Löse die Gleichung $\sqrt{x+9} + \sqrt{x} + \sqrt{x-9} = 7$ (x ist eine reelle Zahl).







„Als Gehirnforscher wünsche ich allen Menschen, dass wir trotz stark wachsender Informationsflut die Fähigkeit bewahren, auf unsere innere Stimme zu hören. Nur so können wir durch Kreativität und durch den Geist der Zusammenarbeit unsere Wünsche verwirklichen und dem Gemeinwohl dienen."

Prof. Dr. Freund Tamás
Mitglied der Leopoldina, der Nationalen Akademie der Wissenschaften, Vizepräsident der Ungarischen Akademie, Förderer des Wettbewerbs

BOLYAI MATHEMATIK TEAMWETTBEWERB®

C. F. GAUSS

2018

1. RUNDE

KLASSE 11

J. BOLYAI

Förderer des Wettbewerbs:
Prof. Dr. Freund Tamás
Mitglied der Leopoldina, der Nationalen Akademie der Wissenschaften, Vizepräsident der Ungarischen Akademie

Begründer des Wettbewerbs und Ersteller der Aufgaben:
Nagy-Baló András, *Mathematiklehrer*

Übersetzer der Aufgaben:
Attila Furdek, *Mathematiklehrer*

Lektoren der Übersetzung:
Matthias Benkeser, *Mathematiklehrer*

Koordinatorin:
Rita Feser, *Mathematiklehrerin*

Betreiber der Homepage und des informatischen Systems:
Georg Probst, *Informatiker*
Tassy Gergely, *Mathematiklehrer*

www.bolyaiteam.de / www.bolyaiteam.at

Markiert die Lösungen der Aufgaben 1-13 auf dem Antwortblatt mit X. Bei den Aufgaben können auch mehrere richtige Antworten vorkommen.

1. Thomas markiert auf der Oberfläche eines Würfels einige Punkte, so dass folgende Bedingung erfüllt ist: Es gibt keine zwei Seitenflächen mit gleich vielen markierten Punkten.
Wie viele Punkte konnte Thomas insgesamt markiert haben?
Bemerkung: Ein Punkt einer Kante liegt auf beiden angrenzenden Seitenflächen (und sogar auf drei, wenn es sich um einen Eckpunkt handelt).

(A) *5* **(B)** *6* **(C)** *10* **(D)** *12* **(E)** *15*

2. Unter 35! versteht man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 35, also $35! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 33\cdot 34\cdot 35$. Wenn man dieses Produkt ausrechnet, erhält man $35! = 10333147966386144929a66651337523200000000$.
Die Frage: Welchen Wert kann die Ziffer a annehmen?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *3* **(D)** *6* **(E)** *9*

3. Im Parlament von Neidland sitzen 100 Abgeordnete. Es gibt keine zwei Abgeordnete, die dasselbe Gehalt haben. Im Plenarsaal stehen 100 Stühle in einem Quadrat mit 10 Reihen und 10 Spalten. Jeder Abgeordnete kennt die Gehälter seiner direkten Nachbarn: rechts, links, vorne, hinten und auch diagonal benachbart (jeder hat also bis zu 8 Nachbarn – diejenigen, die am Rand sitzen, etwas weniger). Nur jene Abgeordnete sind mit ihrem Gehalt zufrieden, die höchstens einen direkten Nachbar haben, der mehr verdient als sie selbst. **Die Frage**: Insgesamt wie viele der 100 Abgeordneten können mit ihrem Gehalt zufrieden sein?

(A) *2* **(B)** *6* **(C)** *10* **(D)** *50* **(E)** *60*

4. Welche Primzahl kann ein Teiler sowohl für n^2+8 als auch für $(n+1)^2+8$ sein (n ist eine natürliche Zahl)?

(A) *3* **(B)** *5* **(C)** *7* **(D)** *11* **(E)** *13*

5. Die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks ABC sind 5 cm, 12 cm und 13 cm lang. Im Inneren des Dreiecks befinden sich zwei gleich große Kreise, für die gilt: I. Sie berühren sich *und* II. Jeder von ihnen berührt genau zwei Seiten des Dreiecks. **Die Frage**: Wie viele cm lang können die Radien der Kreise sein?

(A) *1* **(B)** $\frac{10}{9}$ **(C)** $\frac{26}{17}$ **(D)** $\frac{3}{2}$ **(E)** *2*

6. Wir betrachten die Gleichungen $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$ und $cx^2+ax+b=0$ (a, b, c sind reelle Zahlen mit $a>0$, $b>0$, $c>0$). Man löst zunächst die drei Gleichungen getrennt und notiert alle (reellen) Lösungen. **Die Frage:** Wie viele unterschiedliche Lösungen kann man so insgesamt erhalten?

(A) *0* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4* **(E)** *6*

7. Sophie findet an der Tafel ein konvexes Neuneck vor. Sie zeichnet Diagonalen so in dieses Neuneck, dass gilt: Jede neu gezeichnete Diagonale schneidet höchstens eine der bereits vorhandenen Diagonalen (es geht um Schnittpunkte im Inneren der Diagonalen, die Eckpunkte sind ohne Bedeutung). Sophie setzt das Zeichnen von Diagonalen so lange fort, wie es unter diesen Bedingungen möglich ist. **Die Frage**: Wie viele Diagonalen konnte Sophie insgesamt gezeichnet haben?
Bemerkung: Ein Vieleck heißt konvex, wenn es keine überstumpfen Innenwinkel hat.

(A) *5* **(B)** *9* **(C)** *12* **(D)** *15* **(E)** *18*

8. Für die reellen Zahlen x, y, z gilt: $x-y\geq z$ und $x^2+4y^2+5=4z$. Welche der unten aufgeführten Werte kann z annehmen?

(A) *1* **(B)** *1,5* **(C)** *2* **(D)** *2,5* **(E)** *3*

9. Der Quader $ABCDA'B'C'D'$ hat als Grundfläche das Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 6 cm. Die Höhe des Quaders beträgt 8 cm. Eine Ebene H geht durch die Kante DC. Der Quader wird auf diese Ebene senkrecht projiziert. Wie viele cm^2 kann der Flächeninhalt der Projektion betragen?
Bemerkung: Durch jeden Punkt des Quaders wird eine zu H senkrechte Gerade gelegt. Ihre Schnittpunkte mit H (Lotfußpunkte) bilden die Projektionsfläche.

(A) *48* **(B)** *56* **(C)** *60* **(D)** *64* **(E)** *80*

10. Die Felder eines 5×5 Brettes werden mit den Zahlen von 1 bis 25 belegt. In jedes Feld kommt genau eine Zahl und jede der Zahlen wird genau einmal verwendet. Unter *Abstand* zweier Felder mit mindestens einem gemeinsamen Eckpunkt verstehen wir die positive Differenz der zwei Zahlen, die in diesen Feldern stehen. Unter *Durchmesser* des Brettes verstehen wir den größten dieser Abstände.
Die Frage: Was kann der Durchmesser des Brettes sein?

(A) *5* **(B)** *6* **(C)** *7* **(D)** *8* **(E)** *9*

Achtung! Aufgaben 11-14 folgen auf der nächsten Seite.