12. Die Summe von acht reellen Zahlen ist $\frac{4}{3}$ *und* eine beliebige Summe von sieben dieser Zahlen ist stets positiv.
Die Frage: Welche ist die kleinste ganze Zahl, die unter den acht Zahlen vorkommen kann?

(A) *−9* **(B)** *−7* **(C)** *−5* **(D)** *−3* **(E)** *−1*

13. Gegeben ist ein Dreieck *ABC* (zeichnerisch). Daniel möchte im Äußeren des Dreiecks auf alle denkbaren Arten weitere Dreiecke zeichnen, so dass gilt: Das Ausgangsdreieck und ein weiteres Dreieck bilden zusammen ein gleichschenkliges Dreieck. Wie viele weitere unterschiedliche Dreiecke kann Daniel insgesamt zeichnen?
Bemerkung: Zwei Dreiecke gelten dann als unterschiedlich, wenn ihre Lagen unterschiedlich sind.

(A) *0* **(B)** *4* **(C)** *6* **(D)** *7* **(E)** *9*

Löst die folgende Aufgabe an der angegebenen Stelle des Antwortblattes!

14. „Das Produkt dreier natürlicher Zahlen ist 36.“ sagt Peter und fragt Bea: „Um welche Zahlen handelt es sich?“ Bea überlegt kurz und antwortet: „Das sind zu wenig Angaben.“ Daraufhin teilt Peter Bea auch die Summe der drei Zahlen mit. Bea erwidert: „Die Angaben reichen immer noch nicht aus, um die Frage beantworten zu können.“ **Die Frage:** Welche Summe hat Peter Bea mitgeteilt? Begründet eure Antwort!
Bemerkung: Die drei natürlichen Zahlen müssen nicht unterschiedlich sein.

„Als Gehirnforscher wünsche ich allen Menschen, dass wir trotz stark wachsender Informationsflut die Fähigkeit bewahren, auf unsere innere Stimme zu hören. Nur so können wir durch Kreativität und durch den Geist der Zusammenarbeit unsere Wünsche verwirklichen und dem Gemeinwohl dienen.”

Prof. Dr. Freund Tamás
Mitglied der Leopoldina, der Nationalen Akademie der Wissenschaften, Vizepräsident der Ungarischen Akademie, Förderer des Wettbewerbs

BOLYAI MATHEMATIK TEAMWETTBEWERB®

C. F. GAUSS

2018

1. RUNDE

KLASSE 10

J. BOLYAI

Förderer des Wettbewerbs:
Prof. Dr. Freund Tamás
Mitglied der Leopoldina, der Nationalen Akademie der Wissenschaften, Vizepräsident der Ungarischen Akademie

Begründer des Wettbewerbs und Ersteller der Aufgaben:
Nagy-Baló András, *Mathematiklehrer*

Übersetzer der Aufgaben:
Attila Furdek, *Mathematiklehrer*

Lektoren der Übersetzung:
Matthias Benkeser, *Mathematiklehrer*

Koordinatorin:
Rita Feser, *Mathematiklehrerin*

Betreiber der Homepage und des informatischen Systems:
Georg Probst, *Informatiker*
Tassy Gergely, *Mathematiklehrer*

www.bolyaiteam.de / www.bolyaiteam.at

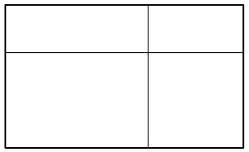
Bolyai Team® **Klasse 10** **16. Januar 2018**

Markiert die Lösungen der Aufgaben 1-13 auf dem Antwortblatt mit X. Bei den Aufgaben können auch mehrere richtige Antworten vorkommen.

1. Ein Baby liegt vor uns auf dem Bauch. Seine Füße zeigen zu uns, sein Kopf zeigt von uns weg. Es dreht sich entlang seiner Körperachse zunächst um 270° nach rechts, anschließend um 540° nach links. In welcher Lage befindet sich das Baby danach?
Bemerkung: „Nach rechts“ und „nach links“ gelten von uns aus gesehen.

(A) *Auf dem Bauch.* **(B)** *Auf dem Rücken.*
(C) *Auf seiner rechten Seite.* **(D)** *Auf seiner linken Seite.*
(E) *Keine dieser Antworten.*

2. Ein Rechteck wurde in vier kleinere Rechtecke zerlegt. In der Figur kann man aber insgesamt 9 Rechtecke erkennen. Die Längen und die Breiten aller Rechtecke sind natürliche Zahlen (in cm). **Die Frage:** Wie viele Rechtecke kann es unter den 9 Rechtecken insgesamt geben, deren Flächeninhalt (in cm^2) eine ungerade Zahl ist?



(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *4* **(E)** *9*

3. Man möchte in mehreren Schritten von 1 bis zu den unten aufgeführten Zahlen gelangen. Die Startzahl 1 wird im ersten Schritt zunächst mit 2 multipliziert. Mit dem Ergebnis verfährt man dann im zweiten Schritt so: Entweder man multipliziert es mit 2 oder man addiert 1 dazu. Das Multiplizieren mit 2 ist stets möglich, die Addition von 1 ist jedoch nur dann erlaubt, wenn die Zahl, zu der man 1 addieren möchte, eine gerade Zahl ist. Alle weiteren Schritte erfolgen wie beim zweiten Schritt. **Die Frage:** Welche der unten aufgeführten Zahlen kann man damit in genau 7 Schritten erreichen?

(A) *27* **(B)** *48* **(C)** *50* **(D)** *54* **(E)** *72*

4. Für welche der aufgeführten Zahlen n lässt sich der Bruch $\frac{n^2+4}{n+3}$ kürzen?

(A) *10* **(B)** *30* **(C)** *207* **(D)** *998* **(E)** *2017*

5. Jede ganze Zahl wird entweder mit Rot oder mit Grün gefärbt. Man stellt fest: I. Die Differenz zweier roter Zahlen ist ungleich d (d ist eine natürliche Zahl) *und* II. Die Differenz zweier grüner Zahlen ist ungleich 1. **Die Frage:** Für welche der unten aufgeführten Zahlen d ist eine solche Färbung möglich?

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *6*

6. Julian zerlegt ein Quadrat in Rechtecke. Anschließend schreibt er die Längen und die Breiten aller dieser Rechtecke (in cm) auf. Er stellt fest: Alle Zahlen sind unterschiedlich. **Die Frage:** In insgesamt wie viele Rechtecke kann Julian das Quadrat zerlegt haben?

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *6*

7. Das Gleichungssystem $\begin{cases} x^2+xy+x=10 \\ y^2+xy+y=20 \end{cases}$ (mit x, y reelle Zahlen) hat eine Lösung $(x\,;y)$, für die gilt:

(A) $y<-2$ **(B)** $-2\le y<0$ **(C)** $0\le y<2$ **(D)** $2\le y<6$ **(E)** $6\le y$

8. Eine dreiseitige Pyramide hat die Kantenlängen 1; 1; 1; $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$. Anna schraffiert alle Seitenflächen der Pyramide, die rechtwinklige Dreiecke sind. Wie viele Seitenflächen konnte Anna insgesamt schraffiert haben?

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *2* **(D)** *3* **(E)** *4*

9. Alle Winkelweiten eines Dreiecks sind Primzahlen (in Grad gemessen). Wie viele solche Dreiecke gibt es insgesamt?
1. Bemerkung: Die Reihenfolge der drei Primzahlen spielt keine Rolle.
2. Bemerkung: Eine Primzahl hat genau 2 Teiler: Die 1 und sich selbst.

(A) *4* **(B)** *5* **(C)** *6* **(D)** *7* **(E)** *8*

10. Die natürliche Zahl n heißt *darstellbar*, wenn es (nicht unbedingt verschiedene) natürliche Zahlen a, b, c gibt, die paarweise teilerfremd sind und für die gilt $n=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$.
Frage: Welche der unten aufgeführten Zahlen sind darstellbar?
Bemerkung: Zwei natürliche Zahlen sind teilerfremd, wenn sie keinen echten gemeinsamen Teiler haben. Beispiel: 4 und 15 (die echten Teiler von 4 sind 2 und 4, die echten Teiler von 15 sind 3, 5 und 15). Gegenbeispiel: 6 und 21, denn sie haben als echten gemeinsamen Teiler die 3.

(A) *8* **(B)** *9* **(C)** *10* **(D)** *11* **(E)** *12*

11. In einem Klassenzimmer befinden sich einige Schüler (alle sind gleichaltrig) und ein Lehrer. Es ist bekannt:
I. Der Lehrer ist um 24 Jahre älter als ein Schüler *und*
II. Das Alter des Lehrers ist um 20 Jahre größer als das Durchschnittsalter aller Personen im Klassenzimmer. **Die Frage:** Wie viele Schüler können sich insgesamt im Klassenzimmer befinden?

(A) *5* **(B)** *10* **(C)** *16* **(D)** *20* **(E)** *28*

Achtung! Aufgaben 12-14 folgen auf der nächsten Seite.