Aufgabe 1J. Klein-Jonas ist ein echt cooler Typ: Er zieht nur Sockenpaare an, bei denen die eine Socke eine andere Farbe hat als die andere. In einem dunklen Kellerraum steht sein Schrank und darin befinden sich im Durcheinander 30 rote, 40 grüne und 40 blaue einzelne Socken. Klein-Jonas nimmt eine Socke nach der anderen aus dem Schrank heraus, ohne dass er ihre Farbe erkennen kann. Was ist die minimale Anzahl an Socken, die er herausnehmen muss, um auf jeden Fall acht Paare an Socken zu erhalten, bei denen die eine Socke eine andere Farbe hat als die andere?

Hinweis: Beachte, dass eine einzelne Socke nicht in zwei verschiedenen Paaren gezählt werden darf.

Ergebnis: 48

Lösungsweg: Falls Klein-Jonas alle 40 grünen Socken und noch 7 rote Socken herausgenommen hat, kann er daraus keine acht Sockenpaare bilden, so dass die eine Socke des Paares eine andere Farbe hat als die andere Socke. Deshalb genügt es nicht, 47 Socken herauszunehmen.
Wenn er aber 48 Socken herausnimmt, dann sind darunter mindestens $48 : 3 = 16$ Socken von einer Farbe und mindestens $48 - 40 = 8$ andersfarbige Socken, woraus er acht Paare an Socken zusammenstellen kann, wie er sie gerne trägt.
Deshalb muss Klein-Jonas mindestens 48 Socken herausnehmen, um acht Paare der gewünschten Art bilden zu können.

Aufgabe 2J. Es seien x und y zwei positive ganze Zahlen, welche die Gleichung $x^2 + 2y^2 = 2468$ erfüllen. Finde x, wenn bekannt ist, dass es nur ein einziges solches Paar (x, y) gibt und dass die Gleichung $1234 = 28^2 + 2 \cdot 15^2$ gilt.

Ergebnis: 30

Lösungsweg: Benutzt man die gegebene Gleichung $1234 = 28^2 + 2 \cdot 15^2$, so erhält man

$$2468 = 2 \cdot (28^2 + 2 \cdot 15^2) = (2 \cdot 15)^2 + 2 \cdot 28^2.$$

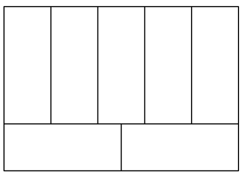
Da man weiß, dass es nur ein einziges solches Zahlenpaar gibt, ist $x = 30$ die Antwort.

Aufgabe 3J. Eine Digitaluhr im 24-Stunden-Zeitformat zeigt die Uhrzeit in Stunden und Minuten an. Wie viele Minuten pro Tag erscheint die Ziffer 5 mindestens einmal am Display?

Ergebnis: 450

Lösungsweg: Es gibt zwei Stunden am Tag, während derer die Ziffer 5 durchgehend zu sehen ist, nämlich 5 und 15. Das sind 120 Minuten. Am restlichen Tag erscheint die Ziffer 5 während der letzten zehn Minuten jeder Stunde ($22 \cdot 10 = 220$ Minuten) und fünfmal während der verbleibenden fünfzig Minuten ($22 \cdot 5 = 110$ Minuten). Insgesamt wird die Ziffer 5 also genau 450 Minuten angezeigt.

Aufgabe 4J. Ein großes Rechteck mit dem Umfang 136 cm ist, wie in der Abbildung, in sieben kongruente Rechtecke unterteilt.



Wie groß ist der Flächeninhalt des großen Rechtecks in cm^2 ?

Ergebnis: 1120

Lösungsweg: Die Seitenlängen der kleinen Rechtecke verhalten sich wie $2 : 5$. Somit können die Seitenlängen mit $2x$ und $5x$ bezeichnet werden. Folglich sind die Seitenlängen des großen Rechtecks $10x$ und $7x$. Daher ist $2 \cdot (10x + 7x) = 34x$ der Umfang des großen Rechtecks. Dies liefert den Wert $x = 4$ und den Flächeninhalt $10 \cdot 7 \cdot 4^2 = 1120$.

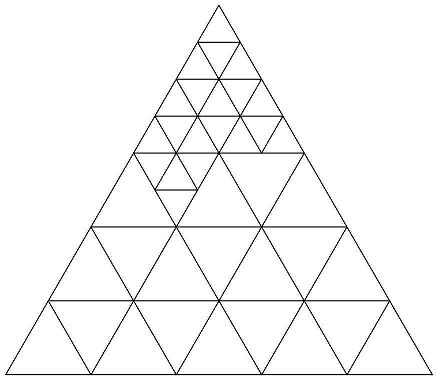
Aufgabe 5J. Eine Schokoladenschachtel hat die Form eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge s cm. Die Schachtel ist mit $2n$ Schokoladenstücken, die alle die Form eines gleichseitigen Dreiecks haben, lückenlos gefüllt: n Stücke haben die Seitenlänge 1 cm und n haben die Seitenlänge 2 cm. Was ist der kleinstmögliche Wert für s?

Ergebnis: 10

Lösungsweg: Es sei a der Flächeninhalt eines kleinen Schokoladenstücks mit der Seitenlänge 1 cm. Dann ist der Flächeninhalt eines großen Schokoladenstücks $4a$ und der gesamte Flächeninhalt aller Schokoladenstücke $na + 4na = 5na$. Der Flächeninhalt der Schachtel ist s^2a, da die Form der Schachtel der Form eines kleinen Schokoladenstücks gestreckt um den Faktor s (in alle Richtungen) entspricht. Daraus folgt, dass $5n = s^2$ ist. Somit muss s ein Vielfaches von 5 sein.

Man kann zeigen, dass es unmöglich ist, fünf große Schokoladenstücke in eine Schachtel mit der Seitenlänge 5 cm zu geben. Somit ist $s \neq 5$. Man kann aber recht einfach eine passende Zusammensetzung von 20 kleinen und 20 großen

Schokoladenstücken in einer Schachtel mit einer Seitenlänge von 10 cm finden.



Aufgabe 6J. Jonas ist in die Jahre gekommen: Er trägt jetzt nur noch Sockenpaare, bei denen beide Socken die gleiche Farbe haben. Er hat mittlerweile auch viele neue Socken, so dass sich nun 20 braune, 30 rote, 40 grüne, 40 blaue, 30 schwarze und 20 weiße einzelne Socken in seinem Schrank befinden. Allerdings steht sein Schrank immer noch in einem dunklen Kellerraum. Was ist die minimale Anzahl an Socken, die Jonas herausnehmen muss, um mit Sicherheit acht Paar Socken zu erhalten, wenn er beim Herausnehmen der Socken ihre Farbe nicht erkennen kann?

Hinweis: Beachte, dass eine einzelne Socke nicht in zwei verschiedenen Paaren gezählt werden darf.

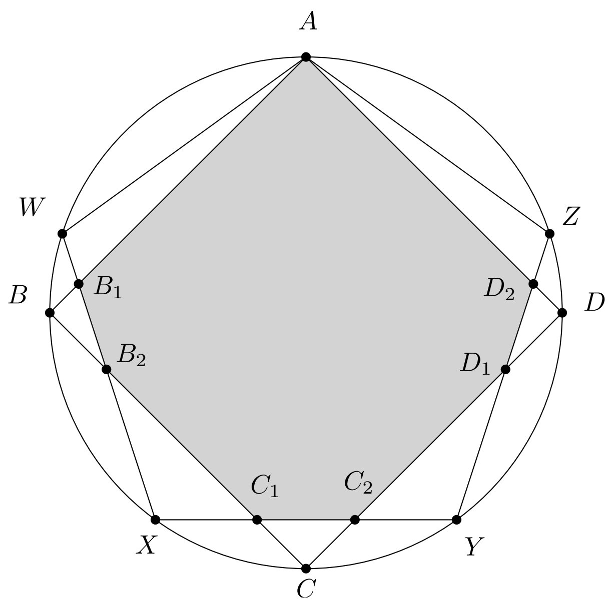
Ergebnis: 21

Lösungsweg: Jede Anzahl an herausgenommenen Socken ist die Summe aus einer geraden Anzahl von Socken, welche die Sockenpaare bilden, und einer gewissen Anzahl von einzelnen, ungepaarten Socken, die höchstens 6 sein kann, weil es nur sechs verschiedene Farben gibt.
Wenn also Jonas 21 Socken aus seinem Schrank nimmt, dann können darunter nicht 6 ungepaarte Socken sein, denn $21 - 6 = 15$ ist keine gerade Zahl. Deshalb können darunter höchstens 5 Socken ungepaart bleiben, und unter den übrigen Socken befinden sich mindestens $\frac{21-5}{2} = 8$ Paar Socken.
Allerdings genügt es nicht, dass Jonas 20 Socken herausholt, denn er könnte 7 Paar weiße Socken und von jeder der sechs Farben noch eine einzelne Socke genommen haben.
Folglich muss Jonas mindestens 21 Socken herausnehmen.

Aufgabe 7J. Gegeben seien ein Quadrat und ein regelmäßiges Fünfeck sowie ein Kreis, auf dem alle Ecken der beiden Vielecke liegen, und zwar so, dass Quadrat und Fünfeck eine gemeinsame Ecke haben. Bestimme den größten Innenwinkel desjenigen Vielecks, das die Schnittfläche der beiden gegebenen Vielecke bildet.

Ergebnis: 153°

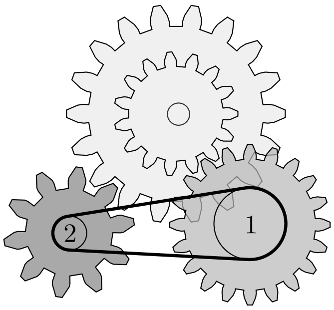
Lösungsweg: Bezeichnet man die Ecken wie in der Abbildung, so ist das Vieleck $AB_1B_2C_1C_2D_1D_2$ die Schnittfläche des Quadrates mit dem Fünfeck.



Da die entstandene Figur achsensymmetrisch zu AC ist, genügt es, die Innenwinkel an den Ecken A, B_1, B_2 und C_1 zu betrachten. Der erste Winkel ist offensichtlich 90° und der letzte ist 135°. Als Außenwinkel des Dreiecks $\triangle XC_1B_2$ ist

$\angle C_1B_2B_1 = 108° + 45° = 153°$, weil $\angle C_1XB_2$ ein Innenwinkel des regelmäßigen Fünfecks ist und somit 108° beträgt. Da das Dreieck $\triangle BB_2B_1$ rechtwinklig ist, erhält man $\angle B_2B_1A = 90° + 27° = 117°$. Also ist der größte Winkel 153°.

Aufgabe 8J. Kreis 1 hat einen Durchmesser von 48 mm. Welchen Durchmesser muss Kreis 2 haben, damit der gesamte Mechanismus funktioniert?



Ergebnis: 20 mm

Lösungsweg: Nachdem man die Anzahl der Zähne gezählt hat, kann man feststellen, dass eine vollständige Umdrehung des ersten Rades $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ einer Umdrehung des Doppelrades zur Folge hat. Eine vollständige Umdrehung des Doppelrades führt wiederum zu $\frac{18}{10} = \frac{9}{5}$ einer Umdrehung von Rad 2. Daraus folgt: Macht Rad 1 eine vollständige Umdrehung, so dreht sich Rad 2 um $\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{12}{5}$ einer ganzen Umdrehung. Der Umfang von Kreis 2 muss aus diesem Grund $\frac{5}{12}$ des Umfangs von Kreis 1 betragen. Da das Verhältnis der beiden Umfänge dem Verhältnis der Durchmesser gleicht, kann der Durchmesser von Kreis 2 mit $\frac{5}{12} \cdot 48$ mm $= 20$ mm berechnet werden.

Aufgabe 9J. Robert hat für seine 62-tägigen Sommerferien im Juli und August einen genauen Plan vorbereitet, der festlegt, an welchen Tagen er lügen und an welchen Tagen er die Wahrheit sagen wird. Für alle k von 1 bis 62 erklärt er am k-ten Tag seiner Ferien, dass er geplant hat, an mindestens k Tagen zu lügen. Wie viele Lügen waren nach Ablauf der 62 Tage unter seinen Aussagen?

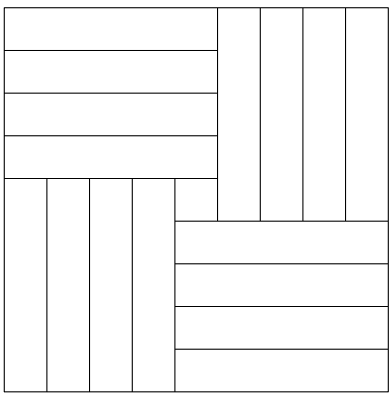
Ergebnis: 31

Lösungsweg: Zunächst ist Folgendes zu beachten: Sagt Robert an einem bestimmten Tag die Wahrheit, so muss er auch an allen vorhergehenden Tagen die Wahrheit gesagt haben. Sagt Robert nur an $k < 31$ Tagen die Wahrheit, so widerspricht dies der Tatsache, dass er an $62 - k > 31$ Tagen lügen würde. Ebenso führt das Sagen der Wahrheit an mehr als 31 Tagen zum Ergebnis, dass er zu wenig lügen würde. Daraus kann man schließen, dass Robert an exakt 31 von den insgesamt 62 Tagen gelogen hat.

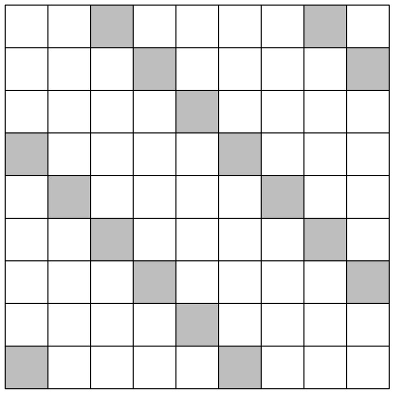
Aufgabe 10J. Bei dem Spiel *Schiffe versenken* hat ein Spieler seinen Flugzeugträger, der aus einem $5 \times 1-$ oder einem $1 \times 5-$Block besteht, irgendwo innerhalb eines $9 \times 9-$Gitters versteckt. Wie oft muss sein Gegner mindestens schießen, das heißt ein Feld im Gitter auswählen, damit er den Flugzeugträger mit Sicherheit mindestens einmal getroffen hat?

Ergebnis: 16

Lösungsweg: Die Zerlegung des $9 \times 9-$Gitters in der folgenden Abbildung zeigt, dass mindestens 16 Schüsse notwendig sind, damit jedes $5 \times 1-$Rechteck einen Treffer enthält.



Aber 16 Schüsse sind auch ausreichend, wie man in der nächsten Abbildung erkennen kann.



Also ist 16 die richtige Antwort.

Aufgabe 11J / 1S. Die Zahlen a, b und c seien paarweise verschiedene positive ganze Zahlen mit $a + b + c = 2015$. Finde den größtmöglichen Wert, den ein gemeinsamer Teiler von a, b und c annehmen kann.

Ergebnis: 155

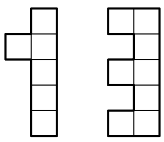
Lösungsweg: Wegen $5 \cdot 13 \cdot 31 = 2015 = a + b + c = \mathrm{ggT}(a, b, c) \cdot (a_0 + b_0 + c_0)$ für gewisse paarweise verschiedene positive ganze Zahlen a_0, b_0 und c_0 erhält man $a_0 + b_0 + c_0 \geq 6$. Also kann $\mathrm{ggT}(a, b, c)$ höchstens $5 \cdot 31 = 155$ sein. Dieses Maximum kann man dadurch erreichen, dass man a_0, b_0 und c_0 mit Summe 13 wählt. Beispielsweise ergibt $a_0 = 1$, $b_0 = 5$ und $c_0 = 7$ die Werte $a = 1 \cdot 155$, $b = 5 \cdot 155$ und $c = 7 \cdot 155$.

Aufgabe 12J / 2S. Ein Zug, der ein Stahlwerk beliefert, besteht aus einer Lokomotive, die sich immer ganz vorne befindet, und sechs Waggons. Jeder Waggon transportiert entweder Kohle oder Eisenerz. Adam wollte ein Foto des vorbeifahrenden Zuges machen. Anstelle des gesamten Zuges befand sich jedoch nur ein Ausschnitt, bestehend aus drei Waggons, auf dem Foto. Zu sehen ist ein Waggon mit Eisenerz direkt gefolgt von zwei Waggons mit Kohle. Da die Waggons nicht völlig symmetrisch waren, konnte Adam mit Gewissheit sagen, dass der Waggon mit Eisenerz der erste der drei Waggons war. Wie viele verschiedene Züge können fotografiert werden, sodass man dasselbe Foto wie Adam erhält?

Ergebnis: 31

Lösungsweg: Es gibt vier Möglichkeiten, an welcher Stelle sich die drei fotografierten E-K-K-Waggons befinden können. Für jede dieser vier Möglichkeiten gibt es 2^3 Möglichkeiten den Zug zu vervollständigen. Allerdings ist zu berücksichtigen, dass der Zug E-K-K-E-K-K zweimal gezählt wird. Daher beträgt die Anzahl der unterschiedlichen Züge $4 \cdot 8 - 1 = 31$.

Aufgabe 13J / 3S. Ein Körper, der aus mehreren identischen Würfeln besteht, sieht von hinten wie eine '1' und von oben wie eine '3' aus (siehe Abbildung). Wie viele Würfel kann man sehen, wenn man den Körper von rechts betrachtet und man weiß, dass der Körper aus der maximal möglichen Anzahl von Würfeln besteht?

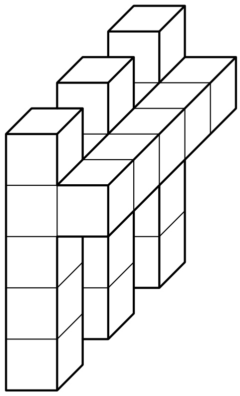


Hinweis: Die folgende Abbildung zeigt einen Würfel, seine Ansicht von hinten bzw. seine Ansicht von oben. Achte auf die genaue Lage der Dreiecke!

Ergebnis: 17

Lösungsweg: Der gesuchte Körper passt offensichtlich in einen großen Quader mit zwei Würfeln Breite, fünf Würfeln Höhe und fünf Würfeln Länge. Teilt man den Quader in zwei Hälften, können die beiden $1 \times 5 \times 5$ –Teile unabhängig voneinander analysiert werden: Betrachtet man den gesuchten Körper von vorne, so sieht man eine gespiegelte '1'. Demzufolge ist im rechten Teil des Körpers nur ein Quadrat von vorne sichtbar, jedoch fünf Quadrate von oben. Dies ist nur möglich, wenn sich fünf Würfel in einer Reihe befinden. Die Argumentation für den linken Teil des gesuchten Körpers ist ähnlich: Es sind fünf Quadrate von vorne sichtbar, jedoch nur drei von oben. Man erhält in diesem Fall die maximale Anzahl an Würfel, wenn man fünf Würfel in jede der drei Spalten packt.

Der aus diesen Überlegungen resultierende Körper sieht aus wie in der folgenden Abbildung. Betrachtet man den Körper von rechts, kann man genau 17 Würfel sehen.



Aufgabe 14J / 4S. Eine natürliche Zahl n wird als *herrlich* bezeichnet, wenn sowohl sie selbst als auch $n+10$ jeweils eine Quersumme haben, die durch 17 teilbar ist. Bestimme die kleinste herrliche Zahl.

Ergebnis: 7999

Lösungsweg: Mit $Q(r)$ sei die Quersumme einer natürlichen Zahl r bezeichnet. Wenn die Zehnerstelle von n nicht 9 ist, so ist $Q(n+10) = Q(n)+1$. Also muss die Zehnerstelle 9 sein. Wenn dann die Hunderterstelle nicht 9 ist, so ergibt sich $Q(n+10) = Q(n)-8$. Wenn sie aber 9 ist und die Tausenderstelle nicht, so erhält man $Q(n+10) = Q(n)-17$. Also kann man n so wählen, dass beide Quersummen $Q(n)$ und $Q(n+10)$ durch 17 teilbar sind. Angenommen n sei so klein wie möglich gewählt und dies sei mit $Q(n) = 2 \cdot 17 = 34$ der Fall. Dann muss die Summe der anderen Stellen ohne die Zehner- und die Hunderterstelle $34 - 2 \cdot 9 = 16 < 2 \cdot 9$ betragen, was bedeutet, dass zwei zusätzliche Ziffern ausreichend sind. Nun kann man leicht sehen, dass $n = 7999$ die gesuchte Zahl ist.

Aufgabe 15J / 5S. Ein Busunternehmen fährt auf einer Linie zwischen den Städten A und D mit Haltestellen in den Städten B und C (in dieser Reihenfolge). Der Ticketpreis ist direkt proportional zur Entfernung, die der Bus zurücklegt. So kostet beispielsweise das Ticket von A nach C genauso viel wie die Tickets von A nach B und von B nach C zusammen. Das Busunternehmen bietet keine Rückfahrtickets an. Lisa, eine eifrige Fahrkartensammlerin, möchte ohne Rücksicht auf die Fahrtrichtung Tickets mit allen möglichen Preisen sammeln. Bis jetzt hat sie bereits Tickets mit den Preisen 10, 40, 50, 60 und 70. Gib die möglichen Preise des fehlenden Tickets an!

Ergebnis: 20, 110

Lösungsweg: Angenommen Lisa besitzt bereits das teuerste Ticket (das von A nach D), dann beträgt der Preis dieses Tickets 70. Da dieser Preis die Summe der Ticketkosten der Abschnitte AB, BC und CD ist und sich zwei der Tickets für diese Abschnitte bereits in Lisas Besitz befinden müssen, kann man daraus schließen, dass 10, 20 und 40 die einzige mögliche Kombination für die Preise dieser drei Tickets ist. Der fehlende Ticketpreis ist also 20. Man sieht sehr schnell, dass sich mit diesen drei Ticketpreisen auch die restlichen gegebenen Preise problemlos zuordnen lassen.

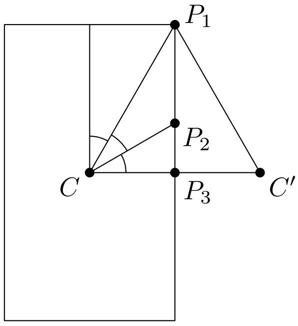
Angenommen das teuerste Ticket fehlt noch in Lisas Sammlung, dann muss das Ticket mit dem Preis 70 für eine Fahrt mit einer Haltestelle dazwischen vergeben werden. Die einzige Möglichkeit, diesen Preis als Summe zweier bereits bekannter Preise zusammenzusetzen, ist $10+60$. Daraus kann man schließen, dass der Ticketpreis für den verbleibenden Abschnitt 40 ist und die Kosten für die längste Strecke $10+40+60 = 110$ betragen. Man sieht wiederum sehr schnell, dass die Verteilung der Ticketpreise den Voraussetzungen entspricht.

Aufgabe 16J / 6S. Helena bewundert in einem Uhrengeschäft eine Uhr, die so in einer transparenten rechteckigen Schachtel verpackt ist, dass der Mittelpunkt der Schachtel mit dem Mittelpunkt der Uhr – das ist der Punkt, an dem sich die Zeiger treffen – zusammenfällt. Die kürzere Seite der Schachtel ist 3 cm lang. Helena stellt fest, dass der Stundenzeiger um zwölf Uhr auf den Mittelpunkt der kürzeren Seite und um ein Uhr auf eine Ecke der Schachtel zeigt. Wie weit voneinander entfernt sind die beiden Punkte auf der längeren Begrenzungsseite der Schachtel, auf die der Stundenzeiger um ein Uhr und um zwei Uhr zeigt?

Ergebnis: $\sqrt{3}$ cm

Lösungsweg: Sei P_x der Punkt auf der längeren Begrenzungsseite der Schachtel, auf den der Stundenzeiger um x Uhr zeigt, und sei C der Mittelpunkt der Schachtel. Da $\angle P_2CP_1 = \angle P_3CP_2 = 30°$ ist, kann man erkennen, dass P_2 der Inkreismittelpunkt und Schwerpunkt des gleichseitigen Dreiecks $CC'P_1$ ist, wobei C' der Spiegelpunkt von C an P_3 ist. Die gesuchte Entfernung $\overline{P_1P_2}$ beträgt demnach $2/3$ der Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 3 cm.

Daraus folgt $\overline{P_1P_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 3$ cm $= \sqrt{3}$ cm.



Aufgabe 17J / 7S. Man ordne die Ziffern von 1 bis 9 so als 9-stellige Zahl an, dass je zwei aufeinander folgende Ziffern eine Zahl bilden, die gleich dem Produkt zweier Zahlen k und l mit $k, l \in \{1, \ldots, 9\}$ ist.

Ergebnis: 728163549

Lösungsweg: Es sei $x, y \in \{1, \ldots, 9\}$ und $x \neq y$. Dann soll das Paar xy *zulässig* heißen, wenn es Zahlen $k, l \in \{1, \ldots, 9\}$ mit $10x + y = k \cdot l$ gibt. Das einzige zulässige Paar mit der Ziffer 9 ist 49, es muss also am Ende der 9-stelligen Zahl z stehen. Die Paare 72 und 27 sind die einzigen zulässigen Paare mit der Ziffer 7. Es kann nur eines dieser Paare vorkommen und zwar entweder 72 am Anfang oder 27 am Ende, weil sonst eine Ziffer doppelt vorkäme. Da das Ende der 9-stelligen Zahl schon besetzt ist, muss 72 am Anfang stehen.
Die zulässigen Paare mit der Ziffer 8 sind 18, 28, 48 und 81. Da die Ziffer 4 schon im Paar 49 verbraucht ist, gibt es nur noch die Möglichkeit, dass der Block 281 entsteht. Man erhält also $z = 7281 \ldots 49$. Nun betrachtet man die noch übrigen Ziffern 3, 5 und 6. Da die Paare 13 und 34 nicht zulässig sind, und da 63 das einzige zulässige Paar xy mit $x \in \{5, 6\}$ und $y = 3$ ist, kann die gesuchte Zahl nur $z = 728163549$ heißen.
Man prüft leicht nach, dass diese Zahl alle gestellten Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 18J / 8S. Finde die größte Primzahl p kleiner als 210, sodass die Zahl $210 - p$ zusammengesetzt ist.

Hinweis: Denke daran, dass die Zahl 1 weder prim noch zusammengesetzt ist.

Ergebnis: 89

Lösungsweg: Es ist besser, anstelle der größten Primzahl p die kleinste zusammengesetzte Zahl n zu suchen, sodass $210 - n$ eine Primzahl ist. Die Primfaktorzerlegung von 210 lautet $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Daraus folgt: Ist n durch 2, 3, 5 oder 7 teilbar, so muss auch $210 - n$ durch 2, 3, 5 oder 7 teilbar sein. In diesen Fällen wäre $210 - n$ keine Primzahl. Der nächstgrößere zusammengesetzte Kandidat für n ist 11^2. Dies ergibt $p = 210 - 121 = 89$ und somit eine Primzahl.

Aufgabe 19J / 9S. Die Leitung einer Grundschule beschloss, eine bestimmte Anzahl an Bleistiften für die Schüler der ersten Jahrgangsstufe, in der es die Klassen A, B und C gibt, anzuschaffen. Wenn sie jedem Schüler die gleiche Anzahl gegeben hätte, so hätte jeder Schüler neun Bleistifte erhalten. Wenn sie die Bleistifte nur in Klasse A verteilt hätte, so hätte jeder Schüler dieser Klasse 30 Bleistifte bekommen. Bei einer Verteilung nur in Klasse B hätte jeder dieser Schüler 36 Bleistifte empfangen. Wie viele Bleistifte hätte ein einzelner Schüler aus Klasse C erhalten, wenn sie nur dort verteilt worden wären?

Ergebnis: 20

Lösungsweg: Bezeichnet man mit x die Gesamtzahl der Bleistifte und mit a, b und c die Anzahl der Schüler in den entsprechenden Klassen, so ergeben sich aus der Aufgabenstellung die Gleichungen $x = 9(a + b + c)$, $x = 30a$ und $x = 36b$. Gesucht ist der Wert x/c. Setzt man $a = x/30$ und $b = x/36$ in die erste Gleichung ein, so erhält man nacheinander

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{3}{10}x + \tfrac{1}{4}x + 9c, \\ \tfrac{9}{20}x &= 9c, \\ \tfrac{x}{c} &= 20. \end{aligned}$$

Aufgabe 20J / 10S. Bestimme alle vierstelligen Quadratzahlen, bei denen die ersten beiden Ziffern und die letzten beiden Ziffern jeweils zweistellige, von Null verschiedene Quadratzahlen sind, wobei letztere aber mit einer Null beginnen darf.

Ergebnis: 1681

Lösungsweg: Da für $k \geq 50$ die Ungleichung $(k + 1)^2 - k^2 > 100$ gilt, ist $50^2 = 2500$ die einzige Quadratzahl, die mit 25 beginnt. Analog gilt dies für 3600, 4900, 6400 und 8100. Also müssen die ersten beiden Ziffern 16 sein. Die einzige Quadratzahl zwischen 1600 und 1700 ist $41^2 = 1681$, welche die geforderten Bedingungen offensichtlich erfüllt.

Aufgabe 21J / 11S. Christian fuhr mit seinem Auto mit konstanter Geschwindigkeit auf der Autobahn von Passau nach Linz. Leider gab es seit kurzer Zeit einige Baustellenbereiche, in denen er seine Geschwindigkeit um ein Viertel verringern musste. Folglich war Christian zu der Zeit, zu der er normalerweise in Linz angekommen wäre, erst sechs Siebtel der Gesamtstrecke gefahren. Welchen Anteil an der Zeit, die er bis zu diesem Zeitpunkt brauchte, fuhr er durch die Baustellenbereiche?

Ergebnis: 4/7

Lösungsweg: Es sei v die konstante Geschwindigkeit, mit der Christian unterwegs war, t die Zeit, die er normalerweise für die Strecke Passau–Linz benötigte, und t_B die Zeit, die er in den Baustellenbereichen verbrachte. Dann gilt folgende Gleichheit von Strecken:

$$\frac{3}{4}v \cdot t_B + v \cdot (t - t_B) = \frac{6}{7} \cdot vt$$

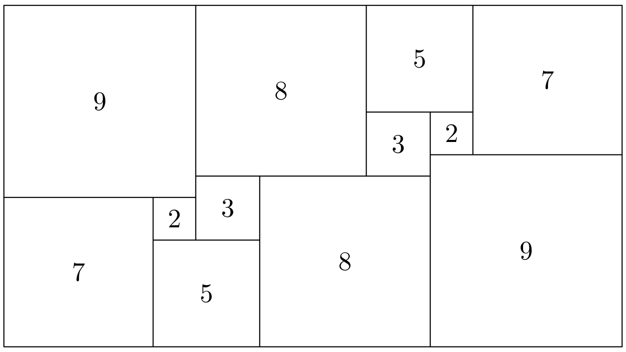
Dividiert man diese Gleichung durch v und formt sie um, so erhält man $\frac{1}{7}t = \frac{1}{4}t_B$, woraus sich das gesuchte Verhältnis $t_B/t = 4/7$ ergibt.

Aufgabe 22J / 12S. Ein Rechteck mit ganzzahligen Seitenlängen wird in zwölf Quadrate zerlegt, die folgende Seitenlängen besitzen: 2, 2, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 8, 8, 9 und 9. Welchen Umfang hat dieses Rechteck?

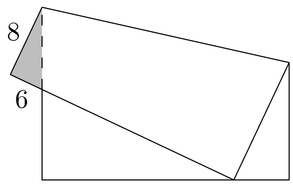
Ergebnis: 90

Lösungsweg: Addiert man die einzelnen Quadratflächen, so erhält man $464 = 2^4 \cdot 29$. Beide Seiten des Rechtecks müssen aufgrund des Quadrates mit der Seitenlänge 9 mindestens 9 betragen. Also ist die einzig mögliche Faktorisierung $16 \cdot 29$, was den Umfang 90 ergibt.

Hinweis: Wie man an der folgenden Abbildung erkennen kann, existiert eine solche Zerlegung tatsächlich.



Aufgabe 23J / 13S. Ein quadratisches Blatt Papier wird so gefaltet, dass eine der Ecken genau auf der gegenüberliegenden Seite des Quadrats zu liegen kommt. Wie in der Abbildung zu sehen ist, gibt es ein kleines Dreieck, das über das ursprüngliche Quadrat hinausragt. Die außerhalb liegende Seite des kleinen Dreiecks, die an die Faltlinie grenzt, hat eine Länge von 8 cm und die Länge der anderen außerhalb liegenden Seite ist 6 cm.

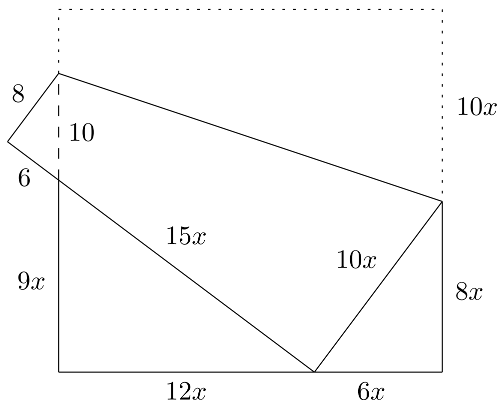


Gib die Seitenlänge des quadratischen Blatt Papiers an!

Ergebnis: 36 cm

Lösungsweg: Betrachtet man die Winkel aller Dreiecke in der Abbildung genauer, sieht man, dass alle Dreiecke rechtwinklig und zueinander ähnlich sind. Bezeichnet man die Seitenlängen des Dreiecks in der rechten unteren Ecke mit $6x$ und $8x$, so folgt aus dem Satz des Pythagoras die dritte Seitenlänge $10x$. Wird das Papier wieder aufgefalten, so erhält man für die Seitenlänge des Quadrats $18x$. Somit ist die untere Seitenlänge des linken unteren Dreiecks $18x - 6x = 12x$. Aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke mit Skalierungsfaktor 3/2 ergeben sich für die Längen der beiden anderen Seiten des Dreiecks $9x$ und $15x$. Die Seitenlänge des ursprünglichen Quadrats ist somit $15x + 6$. Aus

$18x = 15x + 6$ folgt $x = 2$ und die Seitenlänge des Quadrats ist 36 cm.



Aufgabe 24J / 14S. Ein altes Dampfschiff der Donaudampfschifffahrtsgesellschaft fährt gemütlich mit gleichmäßiger Geschwindigkeit den Donau-Kanal entlang. Simon möchte herausfinden, wie lang das Schiff ist, gemessen in seinen Schritten. Während das Schiff langsam vorwärts fährt, schreitet er dazu am Ufer mit gleichmäßigen Schritten vom Heck des Schiffes zum Bug, wobei er 240 Schritte zählt. Am Bug angekommen dreht er sofort um und schreitet wieder zum Heck des Dampfschiffes zurück, wobei er nun 60 Schritte zählt. Wie lang ist das alte Dampfschiff in Simons Schritten?

Ergebnis: 96

Lösungsweg: Wenn Simon wieder an das Heck zurück kommt, hat er $240 + 60 = 300$ Schritte gemacht, wohingegen sich das Schiff $240 - 60 = 180$ Schritte weiterbewegt hat. In der Zeit, in der Simon 60 Schritte macht, ist das Schiff also $180 : 5 = 36$ Schritte vorwärts gefahren. Da Simon nach dem Umdrehen das Heck des Schiffes in 60 Schritten erreicht, ist die Länge des Schiffes $60 + 36 = 96$ Schritte.

Aufgabe 25J / 15S. Die Zahl $137641 = 371^2$ ist die kleinste sechsstellige Zahl, bei der es möglich ist drei paarweise verschiedene Ziffern herauszustreichen, sodass man die Quadratwurzel der gegebenen Zahl erhält: $\cancel{1}37\cancel{6}\cancel{4}1$. Finde die größte sechsstellige Zahl mit dieser Eigenschaft!

Ergebnis: $992016 = 996^2$

Lösungsweg: Es sei $(1000 - n)^2$ die gesuchte Zahl ($n \geq 1$). Man kann die Quadrate für $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ berechnen, indem man die Formel $(1000-n)^2 = 1000 \cdot (1000-2n) + n^2$ verwendet. Man erhält damit: $999^2 = 998001$, $998^2 = 996004$, $997^2 = 994009$, $996^2 = 992016$, … Man erkennt nun, dass die Ziffern 2, 0, 1 paarweise verschieden sind und dass $99\cancel{2}\cancel{0}\cancel{1}6 = 996$ die Quadratwurzel von 992016 ist. Daher ist 992016 die gesuchte Zahl.

Aufgabe 26J / 16S. Linda tippt auf ihrem Taschenrechner. Eine dreistellige Zahl erscheint auf dem Display. Patrick, der gegenüber Linda sitzt, sieht aus seiner Sicht auch eine dreistellige Zahl (auf dem Kopf gestellt). Er merkt, dass die Zahl, die er sieht, um 369 größer ist als die eingetippte Zahl. Wie lautet die von Linda eingetippte Zahl?

Hinweis: Der Taschenrechner hat eine Sieben-Segment-Anzeige. Die Ziffern sehen daher so aus:

Ergebnis: 596

Lösungsweg: Falls eine Ziffer auf den Kopf gestellt wird, dann bleibt sie entweder gleich (0, 2, 5, 8), oder sie ändert sich ($6 \leftrightarrow 9$), oder es entsteht keine Ziffer (1, 3, 4, 7). Falls eine Zahl aus den Ziffern 0, 2, 5, 8 auf den Kopf gestellt wird, ist die enstehende Zahl gleich wie die rückwärts gelesene eingetippte Zahl. Die Differenz zwischen zwei solchen dreistelligen Zahlen ist teilbar durch 99, da $(a + 10b + 100c) - (c + 10b + 100a) = 99(c - a)$ gilt. Wegen $99 \nmid 369$ muss Lindas Zahl 6 oder 9 enthalten.

Falls an der ersten Stelle 9 steht, dann würde die auf den Kopf gestellte Zahl 6 als letzte Stelle haben. Da die Differenz der beiden Zahlen 396 ist, würde die letzte Stelle der gesuchten Zahl 7 sein. Die Ziffer 7 kann aber nicht auf den Kopf gestellt werden, somit ist dieser Fall unmöglich. Analog kann argumentiert werden, dass 9 nicht an der letzten Stelle und 6 nicht an der ersten bzw. an der mittleren Stelle sein kann. Die zwei übrigen Fälle (9 an der mittleren und 6 an der letzten Stelle) führen schließlich zur gesuchten Lösung 596.

Aufgabe 27J / 17S. Es leben drei Familien auf der Insel Na-boi. Jede Familie hat zwei Söhne und zwei Töchter. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus diesen zwölf Personen sechs Ehepaare zu bilden, falls Hochzeiten zwischen Geschwistern verboten sind?

Ergebnis: 80

Lösungsweg: Die Familien werden mit A, B und C bezeichnet. Heiraten die Söhne von A zwei Schwestern von einer anderen Familie, o. B. d. A. von B, dann müssen die Töchter von A die Söhne von C heiraten, da ansonsten zumindest ein Sohn von C seine Schwester heiraten würde. Es folgt, dass die Söhne von B die Töchter von C heiraten. Dies führt zu $2 \cdot 2^3 = 16$ Möglichkeiten, denn es gibt zwei Möglichkeiten, die Familien zu kombinieren, und jedes Töchterpaar hat zwei Möglichkeiten, die Söhne der kombinierten Familien zu heiraten.

Falls aber die Söhne von A sich für Frauen von verschiedenen Familien entscheiden, dann müssen deren Schwestern dies ebenso machen, um innerfamiliäre Hochzeiten zu vermeiden. Die zwei Söhne haben zusammen 8 Möglichkeiten für eine Frau. Dies gilt auch für die Töchter. Nun bleiben in Familie B und C jeweils ein unverheirateter Sohn und eine unverheiratete Tochter übrig. Somit bleibt genau eine Möglichkeit über, um alle zu verheiraten. In diesem Fall gibt es daher $8 \cdot 8 = 64$ Möglichkeiten.

Insgesamt ergeben sich somit $16 + 64 = 80$ Möglichkeiten, um die zwölf Personen zu verheiraten.

Aufgabe 28J / 18S. Hänsel und Gretel haben eine riesengroße, kreisrunde Pizza gebacken. Sie haben 50 gleich große, vom Mittelpunkt ausgehende sektorenförmige Stücke markiert und auf diese in folgender Weise Oliven darauf verteilt: Beginnend bei einem Stück haben sie die nachfolgenden Stücke im Uhrzeigersinn jeweils mit $1, 2, \ldots, 49$ und 50 Oliven belegt. Nun wollen sie diese Riesenpizza entlang der Markierungen mit einem geraden Schnitt durch die Mitte so in zwei gleich große Hälften teilen, dass Hänsel zweimal so viele Oliven erhält wie Gretel. Bestimme die Gesamtzahl der Oliven auf den vier Pizzastücken, die direkt an der Schnittkante liegen.

Ergebnis: 68, 136

Lösungsweg: Wenn man die Pizzastücke nach der Anzahl ihrer Oliven nummeriert, so stellt man fest, dass der Schnitt nicht zwischen den Stücken 1 und 50 bzw. zwischen 25 und 26 liegen kann, denn es gilt

$$2 \cdot (1 + 2 + \cdots + 25) < 26 + 27 + \cdots + 50.$$

Deshalb kann man annehmen, dass die vier direkt an der Schnittkante liegenden Pizzastücke die Nummern n, $n+1$, $n+25$ und $n+26$ tragen, wobei $1 \leq n \leq 24$ gilt. Die Summe $4n+52$ dieser Zahlen ist die gesuchte Summe der Oliven. Nun berechnet man $(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+25) = 25n+\frac{1}{2}\cdot 25\cdot 26 = 25(n+13)$ und $1+2+\cdots+50 = \frac{1}{2}\cdot 50\cdot 51 = 25\cdot 51$. Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

$$25(n+13) = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 51 = 25 \cdot 17 \qquad \text{oder} \qquad 25(n+13) = \frac{2}{3} \cdot 25 \cdot 51 = 25 \cdot 34$$

Aus der ersten Möglichkeit ergibt sich $n = 4$ und die gesuchte Summe ist $4 \cdot 4 + 52 = 68$. Die zweite Mögichkeit liefert $n = 21$ und die Summe $4 \cdot 21 + 52 = 136$.
Insgesamt erhält man also zwei Lösungen, nämlich 68 und 136.

Aufgabe 29J / 19S. Man bestimme alle Primzahlen p mit der Eigenschaft, dass $19p + 1$ eine Kubikzahl ist.

Ergebnis: 421

Lösungsweg: Sei p eine Primzahl, die die Aufgabenstellung erfüllt. Dann gibt es eine ganze Zahl k mit $k^3 = 19p + 1$, wobei $k > 2$ gelten muss. Also ist

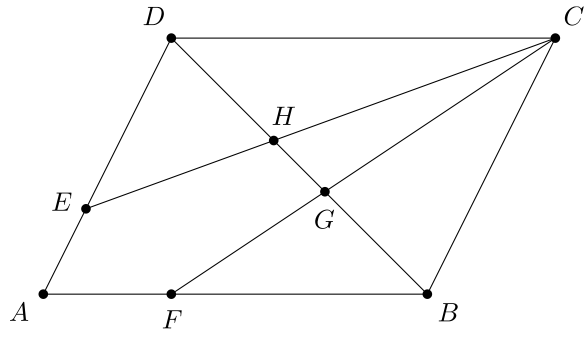
$$19p = k^3 - 1 = (k-1)(k^2 + k + 1).$$

Wegen $k > 2$ sind hierbei beide Faktoren echte Teiler von $19p$. Da die Zahl $19p$ aber das Produkt zweier Primzahlen ist, besitzt sie keine anderen echten Teiler als 19 und p. Deshalb muss $k - 1 = 19$ oder $k^2 + k + 1 = 19$ gelten. Der erste Fall liefert $k = 20$ und $p = 400 + 20 + 1 = 421$, also eine Primzahl. Im zweiten Fall hat die quadratische Gleichung $k^2 + k - 18 = 0$ keine ganzzahlige Lösung. Somit ist $p = 421$ die einzige Antwort.

Aufgabe 30J / 20S. Im Parallelogramm $ABCD$ liegt der Punkt E auf der Seite AD mit $2 \cdot \overline{AE} = \overline{ED}$ und der Punkt F auf der Seite AB mit $2 \cdot \overline{AF} = \overline{FB}$. Die Strecken CF und CE schneiden die Diagonale BD in G bzw. H. Welcher Anteil der Fläche des Parallelogramms $ABCD$ wird von der Fläche des Fünfecks $AFGHE$ bedeckt?

Ergebnis: $\frac{7}{30}$

Lösungsweg:



Im Folgenden werden Flächen von Vielecken mit eckigen Klammern notiert. Da die Dreiecke EHD und CHB ähnlich sind, ergibt sich die Gleichung

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{HD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AD}}{\frac{2}{3}\cdot\overline{AD}} = \frac{3}{2}.$$

Aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke FBG und CDG erhält man $\frac{\overline{DG}}{\overline{GB}} = \frac{3}{2}$. Also ist $\overline{DH} = \overline{BG} = \frac{2}{5}\cdot\overline{DB}$ und $\overline{HG} = \frac{1}{5}\cdot\overline{DB}$. Wegen

$$[ECD] = \frac{2}{3}[ACD] = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}[ABCD] = [FBC]$$

ergibt sich

$$[AFGHE] = [AFCE] - [GCH] = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)[ABCD] = \frac{7}{30}[ABCD].$$

Aufgabe 31J / 21S. Suche die größte fünfstellige Zahl, die die Ziffer Null nicht enthält, mit folgenden Eigenschaften:

- Die Zahl, die aus den ersten drei Stellen gebildet wird, ist neunmal so groß wie die aus den letzten beiden Stellen gebildete Zahl.
- Die Zahl, die aus den letzten drei Stellen gebildet wird, ist siebenmal so groß wie die aus den ersten beiden Stellen gebildete Zahl.

Ergebnis: 85595

Lösungsweg: Sei $\overline{abcde}$ eine fünfstellige Zahl mit $\overline{abc} = 9\cdot\overline{de}$ und $\overline{cde} = 7\cdot\overline{ab}$. Dann folgt

$$63\cdot\overline{de} = 7\cdot\overline{abc} = 70\cdot\overline{ab} + 7c = 10\cdot\overline{cde} + 7c = 1007c + 10\cdot\overline{de},$$

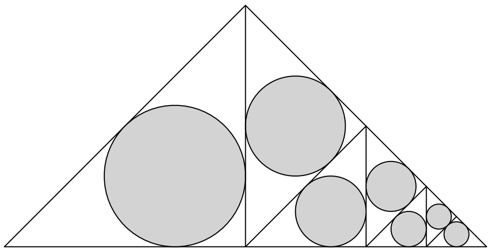
und somit $\overline{de} = \frac{1007c}{53} = 19c$. Analog erhält man $\overline{ab} = 17c$. Falls $c \geq 6$ ist, dann sind die Zahlen $17c$ and $19c$ größer als 100. Es folgt, dass 5 der größtmögliche Wert für c ist. Somit ist für $17119c$ der größtmögliche Wert 85595.

Aufgabe 32J / 22S. Zwölf Karten – neun Blankokarten und drei Spezialkarten mit den Symbolen B, D und K – wurden gemischt und verdeckt gleichmäßig an zwölf Schlauberger verteilt, die in einem Kreis saßen. Nachdem jeder von ihnen seine Karte angeschaut hatte, wurden alle Personen aufgefordert, gleichzeitig ihre Hand zu heben, falls sie wissen, wer zu diesem Zeitpunkt welche Spezialkarte in seiner Hand hält. Dann gaben sie ihre Karte an ihren rechten Nachbarn weiter, schauten wieder ihre Karte an, ihnen wurde wieder die selbe Frage gestellt und dieser Ablauf ging so weiter. Nach dem Blick auf die vierte Karte hob niemand die Hand. Genau ein Schlauberger gab ein Handzeichen nach fünf gesehenen Karten. Als nächstes hoben x Schlauberger nach sechs gesehenen Karten die Hand und y nach sieben gesehenen Karten. Bestimme das Produkt xy.

Ergebnis: 42

Lösungsweg: Derjenige, der als erster ein Handzeichen gegeben hat, hat als erster alle drei Spezialkarten zu Gesicht bekommen. Dieser Schlauberger muss eine Spezialkarte als seine fünfte Karte gesehen haben, weil er sonst seine Hand schon vorher gehoben hätte. Er muss auch eine Spezialkarte gleich zu Beginn erhalten haben, denn andernfalls hätte sein linker Nachbar schon früher ein Handzeichen gegeben. Seine erste Spezialkarte sei mit S_1 bezeichnet, seine fünfte Karte mit S_3 und die andere Spezialkarte, die er zwischendurch bekommen hatte, mit S_2. Nach weiteren Blicken auf die Karten heben genau diejenigen Personen die Hand, welche die Karte S_2 und mindestens eine der beiden anderen Spezialkarten gesehen haben. Sie haben entweder alle drei Spezialkarten gesehen oder können ihre Position und ihr Symbol erschließen. Die Positionen von S_1 und S_3 sind dann zwar allen bekannt, aber die zugehörigen Symbole nicht. Aus diesen Überlegungen folgt, dass sechs Schlauberger nach dem Ansehen von sechs Karten und sieben nach dem Blick in die siebte Karte ihre Hand hoben. Das gesuchte Produkt ist also $6\cdot 7 = 42$.

Aufgabe 33J / 23S. In einem gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreieck mit der Basislänge 1 werden, wie in der Abbildung dargestellt, schrittweise sieben Kreise konstruiert:



Wie groß ist die Summe der Flächeninhalte aller sieben Kreise?

Ergebnis: $\pi\frac{3-2\sqrt{2}}{4} = \pi\frac{(1-\sqrt{2})^2}{4} = \pi\frac{1}{4(1+\sqrt{2})^2} = \pi\frac{1}{4(3+2\sqrt{2})}$

Lösungsweg: Zerlegt man ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck entlang der Basishöhe in zwei kongruente Dreiecke, so sind die beiden neuen Dreiecke zum ursprünglichen Dreieck ähnlich. Die Flächeninhalte der Dreiecke und somit auch die Flächeninhalte der Inkreise verhalten sich wie 2 : 1. Jeder neue Kreis hat aus diesem Grund den halben Flächeninhalt des vorhergehenden Inkreises. Man beachte allerdings, dass die beiden kleinsten Kreise denselben Flächeninhalt haben. Die Summe der Flächeninhalte der sieben Kreise ist also $\frac{1}{2}A+\frac{1}{4}A+\frac{1}{8}A+\frac{1}{16}A+\frac{1}{32}A+2\cdot\frac{1}{64}A = A$, wobei A der Flächeninhalt des Inkreises des gegebenen Dreiecks mit Basislänge 1 ist. Es genügt also, den Flächeninhalt des Inkreises des großen Dreiecks zu berechnen. Mithilfe des Satzes von Pythagoras erhält man die Schenkellängen $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Die Radien des Inkreises stehen senkrecht auf die beiden Schenkel – es ergibt sich gemeinsam mit den Schenkelabschnitten ein Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}$, die zugleich dem gesuchten Radius entspricht. Der Flächeninhalt des großen Inkreises und somit die gesuchte Summe der Flächeninhalte aller sieben Kreise ist also

$$\pi\frac{3-2\sqrt{2}}{4}.$$

Aufgabe 34J / 24S. Bestimme alle Primzahlen p, so dass $p+11$ den Term $p(p+1)(p+2)$ teilt.

Ergebnis: 7, 11, 19, 79

Lösungsweg: Da p eine Primzahl ist, ist sie entweder gleich 11 oder teilerfremd zu 11. Man sieht leicht, dass $p=11$ die geforderte Teilbarkeitsbedingung erfüllt. Ist p teilerfremd zu 11, so ist das gegebene Produkt $p(p+1)(p+2)$ genau dann durch $p+11$ teilbar, wenn $(p+1)(p+2)$ durch 11 teilbar ist. Betrachtet man dieses Produkt modulo $p+11$, so erhält man $(-10)\cdot(-9)$, also die Teilbarkeitsbedingung $p+11 \mid 90$. Diese ist für $p\in\{7,19,79\}$ erfüllt.

Aufgabe 35J / 25S. Kellerasseln (Porcellio scaber) haben 14 Laufbeine. Mutter Kellerassel schaut ihren riesigen Vorrat an identischen Socken und Schuhen durch und bereitet ihre Kinder auf die kommende kalte Jahreszeit vor. Dem kleinen Scaberix erklärt sie, er kann die Socken und Schuhe in beliebiger Reihenfolge anziehen, aber er muss natürlich beim Anziehen eines Schuhes beachten, dass er irgendwann vorher an genau diesen Fuß eine Socke angezogen haben muss. Auf wie viele Arten kann der kleine Scaberix alle seine Füße mit Socken und Schuhen bekleiden?

Ergebnis: $\frac{28!}{2^{14}}$

Lösungsweg: Jede Möglichkeit, wie Scaberix seine 14 Füße bekleiden kann, kann durch ein 28-Tupel repräsentiert werden, in dem die 14 Socken und 14 Schuhe so notiert sind, dass die Socke eines bestimmten Fußes auf einer Position steht, die vor der Position des Schuhes für diesen bestimmten Fuß liegt. Für das erste Paar an Socke und zugehörigem Schuh gibt es $\binom{28}{2}$ Möglichkeiten. Für das zweite Paar gibt es noch $28-2=26$ Plätze und deshalb $\binom{26}{2}$ Möglichkeiten. Fährt man so fort, dann bleibt für das letzte Paar nur noch $\binom{2}{2}=1$ Möglichkeit. Folglich erhält man als Ergebnis

$$\binom{28}{2}\cdot\binom{26}{2}\cdot\binom{24}{2}\cdots\binom{2}{2}=\frac{28!}{2^{14}}.$$

Aufgabe 36J / 26S. Es sei x eine reelle Zahl, für welche die Gleichung $x^3+4x=8$ gilt. Bestimme den Wert von x^7+64x^2.

Ergebnis: 128

Lösungsweg: Um den Wert des gesuchten Ausdrucks zu finden, setzt man die gegebene Beziehung $x^3=8-4x$ wie folgt ein:

$$x^7+64x^2 = x\cdot(x^3)^2+64x^2 = x(8-4x)^2+64x^2 = 64x+16x^3 = 16(x^3+4x) = 128$$

Aufgabe 37J / 27S. Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis AB. Es sei D der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden (Winkelsymmetrale) des Winkels $\angle ACB$ mit der Strecke AB und E der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle BAC$ mit der Strecke BC. Weiter ist bekannt, dass $\overline{AE} = 2 \cdot \overline{CD}$ ist. Wie groß ist der Winkel $\angle BAC$?

Ergebnis: $36°$

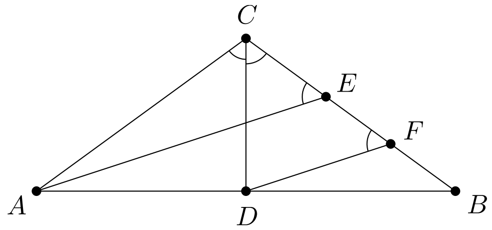
Lösungsweg: Man wähle den Punkt F auf der Strecke BC so, dass $AE \parallel DF$ gilt. Daraus folgt $\overline{DF} = \frac{1}{2}\overline{AE} = \overline{CD}$. Das Dreieck FCD ist demnach gleichschenklig mit der Basis FC. Es sei $\alpha = \angle BAC$. Dann gilt

$$\angle CEA = \angle CFD = \angle DCF = \angle ACD = 90° - \alpha.$$

Da der Winkel $\angle EAC = \frac{1}{2}\alpha$ ist, ergibt sich im Dreieck $\triangle AEC$ die Beziehung

$$\frac{1}{2}\alpha + 3(90° - \alpha) = 180°.$$

Hieraus erhält man für den gesuchten Winkel $\alpha = 36°$.



Aufgabe 38J / 28S. Die reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\geq 1}$ sei definiert durch $a_1 = 2015$ und die Gleichung

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 \cdot a_n$$

für alle $n \geq 1$. Bestimme a_{2015}.

Ergebnis: $\frac{1}{1008}$

Lösungsweg: Subtrahiert man für $n \geq 2$ die beiden Rekursionsformeln für n und $n-1$, so ergibt sich die Gleichung

$$a_n = n^2 \cdot a_n - (n-1)^2 \cdot a_{n-1},$$

die zu $a_n = \frac{n-1}{n+1} \cdot a_{n-1}$ vereinfacht werden kann. Deshalb ist

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdots \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot a_1 = \frac{2a_1}{n(n+1)}$$

und somit $a_{2015} = \frac{2\cdot 2015}{2015\cdot 2016} = \frac{1}{1008}$.

Aufgabe 39J / 29S. Katrin und Henriette haben das folgende Spiel erfunden: Sie färben die Seiten von zwei fairen zwölfseitigen Würfeln mit den Farben Türkis, Rosa und Gelb, sodass jede der Farben zumindest einmal auf einer Seite eines jeden Würfels erscheint und die Farbe Gelb auf genau vier Seiten des ersten Würfels vorkommt. Es werden beide Würfel gleichzeitig geworfen. Zeigen beide Würfel dieselbe Farbe, gewinnt Katrin, andernfalls gewinnt Henriette. Die Farben sind so verteilt, dass die Gewinnchance für beide Mädchen gleich ist. Wie viele rosa gefärbte Seiten hat der zweite Würfel?

Ergebnis: 1, 9

Lösungsweg:

Mit t_1 bezeichnet man die Anzahl der türkis gefärbten Seiten auf dem ersten Würfel. Analog dazu wird die Anzahl der anderen gefärbten Seiten auf einem der beiden Würfel mit r_1, g_1, t_2, r_2, g_2 bezeichnet. Man weiß, dass $t_1 + r_1 + g_1 = 12$, $t_2 + r_2 + g_2 = 12$ und $g_1 = 4$ gilt. Von den insgesamt $12^2 = 144$ möglichen Ausgängen des Werfens mit zwei Würfeln erscheint exakt in der Hälfte der Fälle dieselbe Farbe auf beiden Würfeln. Somit folgt

$$t_1t_2 + r_1r_2 + g_1g_2 = 72.$$

Man drückt mit Hilfe der obigen Beziehungen die linke Seite der Gleichung in den Variablen t_1, t_2 und r_2 aus und erhält

$$t_1t_2 - t_1r_2 - 4t_2 + 4r_2 + 48 = 72,$$

oder

$$(t_1 - 4)(t_2 - r_2) = 24.$$

Verwendet man $-3 \leq t_1 - 4 \leq 3$ und $-9 \leq t_2 - r_2 \leq 9$, so lässt sich daraus schließen, dass $t_2 - r_2$ entweder 8 oder -8 ist. Daraus ergibt sich gemeinsam mit $0 < g_2 = 12 - t_2 - r_2$, dass r_2 entweder 1 oder 9 sein muss. Eine kurze Überprüfung zeigt, dass beide Werte möglich sind.

Aufgabe 40J / 30S. Es sitzen $n > 24$ Frauen um einen großen runden Tisch. Jede einzelne von diesen lügt immer oder spricht immer die Wahrheit. Jede von ihnen behauptet:

- Ich spreche die Wahrheit.
- Die Person 24 Plätze rechts von mir ist eine Lügnerin.

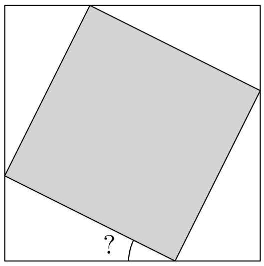
Finde das kleinste n, für das dies möglich ist.

Ergebnis: 32

Lösungsweg: Man betrachtet eine Frau, dann die Frau 24 Plätze rechts von ihr, dann die Frau weitere 24 Plätze rechts davon, usw. Nach einer gewissen Anzahl s solcher Schritte landet man schließlich wieder bei der Frau, von der aus man gestartet ist. Für dieses s muss gelten, dass $24s$ ein Vielfaches von n ist. Das kleinste s, welches das erfüllt, ist $s = n/\operatorname{ggT}(n, 24)$.

Die Ehrlichkeit der Frauen muss bei diesem Prozess wechseln. Jede Frau ist genau dann ehrlich, wenn die Frau 24 Plätze rechts von ihr eine Lügnerin ist. Wenn s ungerade wäre, würde das zu einem Widerspruch führen. Deswegen muss n durch eine höhere Potenz von 2 teilbar sein als 24. Der kleinste Kandidat dafür ist 32 und man prüft dafür leicht die geforderten Bedingungen nach.

Aufgabe 41J / 31S. Betrachte zwei Quadrate mit gemeinsamem Zentrum, so dass die Ecken des kleineren Quadrates auf den Seiten des größeren Quadrates liegen. Entfernt man das kleinere Quadrat, so bleiben vier kongruente Dreiecke übrig. Die Fläche eines solchen Dreiecks soll jeweils ein Zwölftel der Fläche des großen Quadrates betragen. Wie groß ist der kleinste Innenwinkel dieser Dreiecke?



Ergebnis: $15°$

Lösungsweg: Es seien a, b mit $a \leq b$ die Katheten der Dreiecke und c die Hypotenuse. Die Fläche des kleinen Quadrates beträgt zwei Drittel der Fläche des großen Quadrates, daher beträgt die Fläche eines Dreiecks ein Achtel der Fläche des kleinen Quadrates. Also gilt

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{8}c^2.$$

Sei α der kleinste Innenwinkel eines Dreiecks, dann ist $a = c \sin \alpha$ und $b = c \cos \alpha$. Somit ergibt sich

$$c^2 = 4ab = 4c^2 \sin \alpha \cos \alpha = 2c^2 \sin 2\alpha,$$

oder

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}.$$

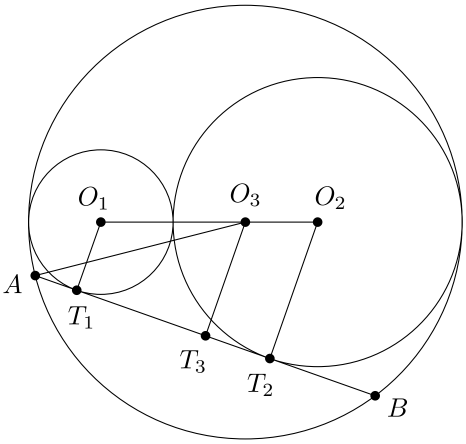
Da $\alpha \leq 45°$ ist, folgt $2\alpha = 30°$ und schließlich $\alpha = 15°$.

Aufgabe 42J / 32S. Ein Kreis k_3 mit Radius 3 hat im Inneren zwei Berührkreise k_1 und k_2 mit den zugehörigen Radien 1 und 2. Die Kreise k_1 und k_2 berühren sich zusätzlich von außen. Die Punkte A und B liegen auf k_3 und einer gemeinsamen externen Tangente von k_1 und k_2. Wie lang ist die Strecke AB?

Ergebnis: $\frac{4}{3}\sqrt{14}$

Lösungsweg: Bezeichne mit O_1, O_2, O_3 die jeweiligen Mittelpunkte von k_1, k_2, k_3, und mit T_1, T_2, T_3 die Lotfußpunkte von O_1, O_2, O_3 auf die Sehne AB. Dann sind T_1 und T_2 Tangentenpunkte von AB an k_1 bzw. k_2. Da $O_1T_1 \parallel O_2T_2 \parallel O_3T_3$ ist, gilt $\overline{O_1T_1} = 1$, $\overline{O_2T_2} = 2$ und $\overline{O_1O_3} = 2\overline{O_2O_3}$. Weil O_1, O_2 und O_3 kollinear sind, erhält man mit Hilfe des Strahlensatzes $\overline{O_3T_3} = \frac{5}{3}$. Mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck $\triangle T_3O_3A$ ergibt sich

$$\overline{AB} = 2\overline{AT}_3 = 2\sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{4}{3}\sqrt{14}.$$



Aufgabe 43J / 33S. Eines Tages traf Ödipus, ein unerschrockener Held, die Sphinx, die ihm folgendes Rätsel aufgab: Nachdem sie eine positive zweistellige Zahl S gewählt hat, darf Ödipus drei einstellige Zahlen $a < b < c$ nennen und fragen, ob S durch diese Zahlen teilbar ist. Für jede dieser Zahlen bekommt er die Antwort 'ja' oder 'nein'. Nachdem er die Antworten bekommen hatte, war Ödipus verzweifelt, denn genau zwei Zahlen erfüllten die genannten Bedingungen. Aber dann teilte ihm die Sphinx mit, dass sie sich bei der Teilbarkeit durch b geirrt hatte. Nun konnte Ödipus die Ausgangszahl eindeutig bestimmen. Wie lautete S?

Ergebnis: 84

Lösungsweg: Es gibt also genau drei zweistellige Zahlen, welche die Teilbarkeitsbedingungen bezüglich a und c erfüllen — zwei davon aufgrund der ersten drei Antworten und eine weitere nach der Korrektur der Antwort für b. Die Antworten auf die Frage der Teilbarkeit durch a bzw. c müssen beide 'ja' gewesen sein, denn selbst nur eine Antwort 'nein' würde zu viele mögliche zweistellige Zahlen liefern. Alle drei Zahlen müssen somit ein Vielfaches von $m = \mathrm{kgV}(a, c)$ sein und es muss $25 \le m \le 33$ gelten, weil es genau drei zweistellige Vielfache von m geben soll. Nur zwei Zahlen in diesem Bereich sind kleinste gemeinsame Vielfache zweier Ziffern, nämlich $28 = \mathrm{kgV}(4, 7)$ und $30 = \mathrm{kgV}(5, 6)$. Die zweite Kombination ist nicht möglich, da kein b existiert mit $5 < b < 6$. Also ist $a = 4$ und $c = 7$. Wäre $b = 5$, gäbe es keine zweistellige Zahl, die durch a, b und c teilbar ist. Für $b = 6$ gibt es zwei Vielfache von $m = 28$, die nicht durch 6 teilbar sind, nämlich 28 und 56, und ein Vielfaches, das durch 6 teilbar ist, nämlich 84. Also war $S = 84$.

Aufgabe 44J / 34S. Ein Auto, ein Motorrad, ein Vespa-Roller und ein Fahrrad fuhren eine Straße entlang, jedes Fahrzeug mit einer konstanten Geschwindigkeit. Der Autofahrer holte den Vespa-Roller um 12 Uhr mittags ein und begegnete dem Fahrradfahrer um 14 Uhr sowie dem Motorradfahrer um 16 Uhr. Der Motorradfahrer seinerseits traf den Vespa-Roller um 17 Uhr und holte den Fahrradfahrer um 18 Uhr ein. Wann begegnete der Fahrradfahrer dem Vespa-Roller?

Ergebnis: 15:20 Uhr

Lösungsweg: Da die gesuchte Zeit nicht vom gewählten Bezugssystem abhängt, kann man annehmen, dass sich das Auto gar nicht bewegt. Unter dieser Annahme brauchte das Motorrad 1 Stunde vom Treffpunkt mit dem Auto zu dem mit dem Vespa-Roller, wohingegen der Vespa-Roller 5 Stunden für die gleiche Distanz benötigte. Deshalb war der Motorradfahrer 5-mal so schnell wie der Vespa-Roller. Analog findet man, dass der Motorradfahrer 2-mal so schnell war wie der Fahrradfahrer. Folglich beträgt das Verhältnis der Geschwindigkeit des Vespa-Rollers zu der des Fahrradfahrers $2 : 5$.

Wenn nun der Vespa-Roller t Stunden vom Treffpunkt mit dem Auto zu dem mit dem Fahrrad benötigte, dann brauchte der Fahrradfahrer dazu $t - 2$ Stunden. Da das Verhältnis dieser Zeiten genau das Inverse des Verhältnisses der zugehörigen Geschwindigkeiten ist, erhält man

$$\frac{t-2}{t} = \frac{2}{5}$$

und daraus $t = 10/3$. Weil der Vespa-Roller das Auto um 12 Uhr traf, begegnete er folglich dem Fahrradfahrer $3\frac{1}{3}$ Stunden später, also um 15:20 Uhr.

Aufgabe 45J / 35S. Der Boden einer Halle ist mit einem quadratischen Teppich der Seitenlänge 22 Meter bedeckt. Der Staubsaugerroboter *RoboSaug* soll den Teppich reinigen. Der Einfachheit halber ist der Teppich in 484 Einheitsquadrate unterteilt und *RoboSaug* reinigt ein Quadrat nach dem anderen nach folgenden Regeln:

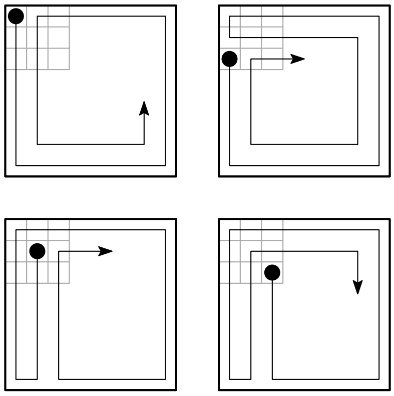
- Wenn ein Einheitsquadrat gesaugt wurde, wird es nicht mehr befahren.
- Der *RoboSaug* behält eine einmal gewählte Fahrtrichtung bei, bis er sie ändern muss, weil er den Rand oder ein schon gesaugtes Einheitsquadrat erreicht.

- Wenn er die Richtung wechseln muss und es zwei Möglichkeiten gibt, wählt er eine beliebige.

Am Anfang wird der *RoboSaug* auf ein Einheitsquadrat gesetzt und wählt eine zulässige Startrichtung. Wie viele mögliche Startquadrate gibt es, so dass der *RoboSaug* den ganzen Teppich saugen kann, wenn er auf einem beliebigen Feld aufhören darf?

Ergebnis: 20

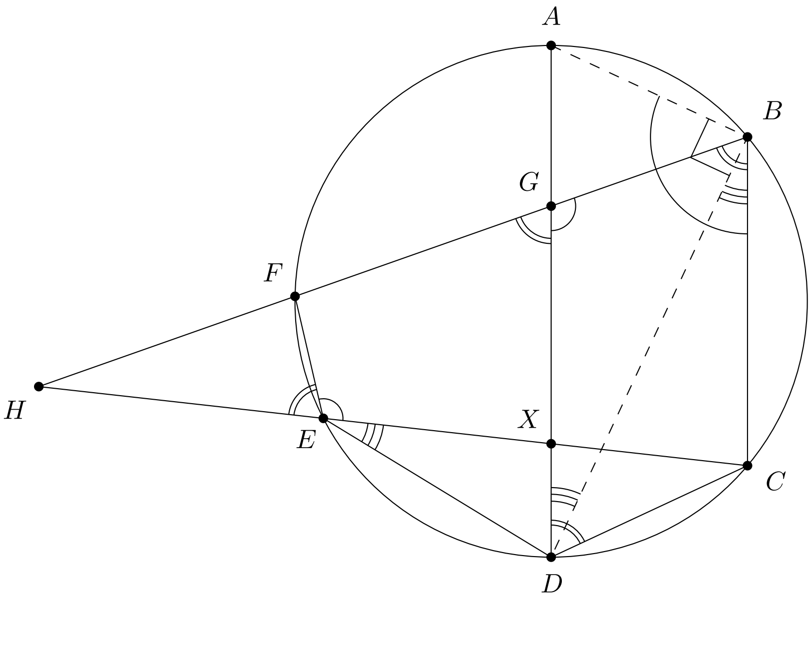
Lösungsweg: Falls der *RoboSaug* nicht in einem der 3×3–Quadrate in den Ecken startet, dann bleibt immer ein nicht gereinigter Teil des Teppichs übrig: Wenn der *RoboSaug* den Rand verlässt, was spätestens im siebten Zug der Fall ist, teilt er den nicht gesaugten Raum in zwei separate Bereiche. Innerhalb der 3×3–Quadrate in den Ecken gilt für die Startfelder mit den Koordinaten $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, dass diese aus ähnlichen Gründen nicht als Startfelder geeignet sind. Aber für alle anderen Koordinaten $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(3, 1)$, $(1, 3)$ gibt es einen geeigneten Weg der alles reinigt. Also gibt es insgesamt $4 \cdot 5 = 20$ mögliche Startfelder.



Aufgabe 46J / 36S. Die Punkte A, B, C, D, E und F liegen in dieser Reihenfolge im Uhrzeigersinn auf einem Kreis k. Ferner sei AD ein Durchmesser von k und BF schneide die Strecke AD in G und die Gerade CE in H. Außerdem seien $\angle FEH = 56°$, $\angle DGB = 124°$ und $\angle DEC = 34°$. Bestimme den Winkel $\angle CEB$.

Ergebnis: 22°

Lösungsweg: Aufgrund des Umfangswinkelsatzes ist $\angle CDB = \angle CEB$, so dass es genügt $\angle CDB$ zu bestimmen. Nun ist $124° + 56° = 180°$ und $34° + 56° = 90°$. Bezeichnet man den Schnittpunkt von AD und CH mit X, so folgt aus $\angle DGB = 124°$, dass $\angle FGX = 56°$ ist. Wegen $\angle FEH = 56°$ folgt nun nach dem Außenwinkelsatz für Sehnenvierecke, dass $EXGF$ ein Sehnenviereck ist. Da $ECBF$ ebenfalls ein Sehnenviereck ist, ergibt sich $AD \parallel BC$. Weil AD ein Durchmesser ist, ist das Dreieck $\triangle ADB$ rechtwinklig und es folgt $\angle ABC = 124°$, da aufgrund des Umfangswinkelsatzes $\angle DBC = \angle DEC = 34°$ ist. Aus der Parallelität $AD \parallel BC$ erhält man $\angle BDA = \angle DBC = 34°$, und weil $ADCB$ ein Sehnenviereck ist, gilt $\angle CDA = 180° - \angle ABC = 56°$, woraus $\angle CEB = \angle CDB = 56° - 34° = 22°$ folgt.



Aufgabe 47J / 37S. Zehn Personen – fünf Frauen und deren Ehemänner – nahmen an n Veranstaltungen teil. Es ist bekannt, dass kein verheiratetes Paar an derselben Veranstaltung teilnahm, jedes nicht verheiratete Paar, auch gleichgeschlechtlich, zusammen genau eine Veranstaltung besuchte und dass eine Person nur an zwei Veranstaltungen anwesend war. Wie lautet das kleinste n, für das dies möglich ist?

Ergebnis: 14

Lösungsweg: Mit (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2), (d_1, d_2), (e_1, e_2) seien die Ehepaare bezeichnet. Man kann o. b. d. A. annehmen, dass a_1 die Person ist, die nur an zwei Veranstaltungen teilnahm, und dass die erste davon auch von b_1, c_1, d_1 und e_1 besucht wurde, wohingegen die zweite von deren Ehepartnern besucht wurde. Jede weitere Veranstaltung kann unter den gegebenen Bedingungen von höchstens zwei der acht Personen $b_1, b_2, \ldots, e_1, e_2$ gleichzeitig besucht worden sein. Wie viele solche Veranstaltungen es mindestens geben muss, kann man berechnen, indem man die Anzahl der verheirateten Paare unter ihnen, die Anzahl der Paare aus der ersten Veranstaltung mit b_1, c_1, d_1 und e_1 sowie diejenige aus der zweiten Veranstaltung mit b_2, c_2, d_2 und e_2 von der Anzahl aller möglichen Paare aus diesen acht Personen abzieht. Man erhält somit für diese Anzahl $28 - 4 - 6 - 6 = 12$. Wenn darüber hinaus a_2 an vier disjunkten von diesen Veranstaltungen teilgenommen hat, ist die beschriebene Situation erreicht. Der kleinste mögliche Wert von n ist daher 14.

Aufgabe 48J / 38S. Sandra und Alex sollen eine dreistellige Zahl $\overline{abc}$, in der $0 < a < b < c$ gilt, mit 6 multiplizieren und dann die Zehnerstelle mit der Hunderterstelle vertauschen. Obwohl Alex versehentlich zuerst die Stellen vertauscht und dann multipliziert hat, erhält er das gleiche Ergebnis wie Sandra, die den Anweisungen gefolgt ist. Wie lautet $\overline{abc}$?

Ergebnis: 678

Lösungsweg: Wegen $0 < a < b$ gilt $b \geq 2$ und $6 \cdot \overline{bac} > 1200$, also muss das Ergebnis von Alex eine vierstellige Zahl sein. Schreibt man $6 \cdot \overline{bac} = \overline{defg}$, dann weiß man, dass $6 \cdot \overline{abc} = \overline{dfeg}$ gilt. Subtrahiert man diese zwei Gleichungen voneinander, so ergibt sich

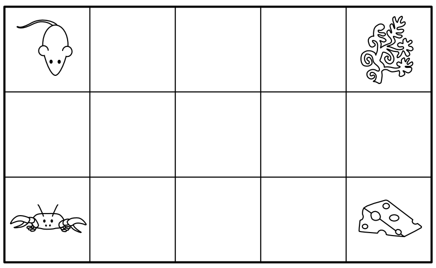
$$6 \cdot (\overline{bac} - \overline{abc}) = \overline{defg} - \overline{dfeg}.$$

Somit ist $540 \cdot (b - a) = 90 \cdot (e - f)$, also $6(b - a) = e - f$. Aus $b > a$ und da e und f Ziffern sind, somit $|e - f| \leq 9$ gilt, folgt $b - a = 1$ und $e - f = 6$. Einsetzen von $b = a + 1$ in $6 \cdot \overline{bac} = \overline{defg}$ liefert

$$\overline{defg} = 6 \cdot (100(a + 1) + 10a + c) = 660(a + 1) - 6(10 - c).$$

Wegen $3 \leq c \leq 9$ bedeutet dies, dass $\overline{defg}$ von einem Vielfachen von 660 um mindestens 6 und höchstens 42 in Sechserschritten nach unten abweicht. Betrachtet man nacheinander $a = 1, 2, \ldots, 7$ und berücksichtigt $e - f = 6$, so erhält man alle möglichen Kandidaten für $\overline{defg}$. Das sind 1938, 2604, 3930, 3936, 4602 und 4608. Nur für $\overline{defg} = 4608$ hat die Zahl $\overline{bac} = \overline{defg}/6$ verschiedene Ziffern ungleich Null, denn es ist $4608 : 6 = 768$. Tatsächlich prüft man leicht nach, dass $6 \cdot \overline{abc} = 6 \cdot 678 = 4068 = \overline{dfeg}$ gilt.

Aufgabe 49J / 39S. Betrachte ein $5 \times 3-$Gitter. Eine Maus in der linken oberen Ecke will ein Stück Käse in der rechten unteren Ecke erreichen, und eine Krabbe in der linken unteren Ecke möchte zur Alge in der rechten oberen Ecke. Die Tiere bewegen sich gleichzeitig, jede Sekunde bewegt sich die Maus ein Feld nach rechts oder unten und die Krabbe bewegt sich ein Feld nach rechts oder oben. Auf wie vielen verschiedenen Wegen können die Tiere ihr Futter erreichen, ohne sich dabei zu treffen?



Ergebnis: 70

Lösungsweg: Die Tiere können sich nur in der mittleren Reihe treffen. Darüber hinaus ist der Weg jedes Tieres eindeutig bestimmt durch die besuchten Quadrate in der Mittelreihe. Es ist leicht zu sehen, dass die Tiere sich nicht treffen, falls die Mittelteile ihrer Wege sich nicht überdecken. Also ist die Anzahl der Paare durchschnittsfremder Segmente der Mittelreihe gesucht.

Zuerst sei der Fall betrachtet, dass es mindestens ein unbenutztes Feld zwischen den Segmenten gibt. Die Anzahl der Segment-Paare lässt sich errechnen als $2 \cdot \binom{6}{4}$, denn man wählt zuerst 4 der 6 Kanten der Mittelreihe, wobei die Start- und die Ende-Kante mitgezählt werden, und dann das Tier, das die Felder zwischen den ersten beiden von links gewählten Kanten benutzt. Das zweite Tier benutzt dann die Felder zwischen den rechten zwei gewählten Kanten.

Falls kein Zwischenraum zwischen den benutzten Feldern der Mittelreihe vorhanden ist, gibt es $2 \cdot \binom{6}{3}$ Paare, da die Abschnitte durch drei Kanten beschrieben werden können. Das erste Tier nutzt die Felder zwischen erster und zweiter Kante, das zweite Tier die Felder zwischen zweiter und dritter Kante.

Insgesamt gibt es also $2 \cdot \binom{6}{4} + 2 \cdot \binom{6}{3} = 70$ mögliche Wege.

Aufgabe 50J / 40S. Bestimme die Anzahl aller positiven ganzen Zahlen n kleiner gleich 1000, für die $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor$ ein Teiler von n ist.

Hinweis: Dabei bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ den ganzzahligen Anteil einer reellen Zahl x, das heißt die größte ganze Zahl kleiner gleich x.

Ergebnis: 172

Lösungsweg: Es ist $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor = k$ genau dann, wenn $k^3 \leq n \leq (k+1)^3 - 1$ gilt. Von den $3k^2 + 3k + 1$ Zahlen in diesem Intervall ist, beginnend bei k^3, jede k-te Zahl durch k teilbar. Davon gibt es $3k + 4$ Stück. Nun muss man nur noch diesen Ausdruck aufsummieren für alle k mit $(k+1)^3 - 1 \leq 1000$, also für $k \leq 9$, und 1 addieren für die Zahl 1000, welche die gegebene Bedingung ebenfalls erfüllt. Insgesamt erhält man

$$1 + \sum_{k=1}^{9} (3k + 4) = 1 + 3 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} + 4 \cdot 9 = 172.$$

Aufgabe 51J / 41S. Man bestimme alle reellen Zahlen m, sodass die Lösungen der Gleichung

$$x^3 - 15\sqrt{2}x^2 + mx - 195\sqrt{2} = 0$$

die Längen der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sind.

Ergebnis: 281/2

Lösungsweg: Man bezeichnet mit a, b und c die Lösungen der gegebenen Gleichung, die auch die Längen der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sind, so dass $0 < a, b < c$ gilt, was bedeutet, dass die Seite mit der Länge c die Hypotenuse ist. Nach dem Satz des Pythagoras gilt dann $a^2 + b^2 = c^2$. Indem man $(x - a)(x - b)(x - c)$ ausmultipliziert und hernach Koeffizienten vergleicht, oder sofort nach dem Wurzelsatz von Vieta erhält man

$$15\sqrt{2} = a + b + c, \quad m = ab + ac + bc, \quad 195\sqrt{2} = abc.$$

Quadrieren von $15\sqrt{2} - c = a + b$ führt zu $450 - 30\sqrt{2}c = 2ab$. Nun multipliziert man dies mit c und setzt $abc = 195\sqrt{2}$ ein. Dadurch ergibt sich die quadratische Gleichung

$$\sqrt{2}c^2 - 15c + 13\sqrt{2} = 0$$

mit den Lösungen $c_1 = \sqrt{2}$ und $c_2 = 13\sqrt{2}/2$. Weil die Bedingungen $0 < a, b < c$ und $abc = 195\sqrt{2}$ nur den Wert $c = 13\sqrt{2}/2$ zulassen, kann die gesuchte Zahl m folgendermaßen berechnet werden:

$$m = ab + ac + bc = \frac{1}{2} \cdot ((a + b + c)^2 - 2c^2) = \frac{1}{2} \cdot 450 - c^2 = 281/2$$

Aufgabe 52J / 42S. In einem Korb liegen grüne und rote Äpfel, wobei mindestens einer rot ist und mindestens zwei grün sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig entnommener Apfel rot ist, ist 42 Mal so groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass zwei zufällig (ohne Zurücklegen) entnommene Äpfel beide grün sind. Wie viele grüne und wie viele rote Äpfel befinden sich im Korb?

Ergebnis: 4 grüne und 21 rote

Lösungsweg: Sei g die Anzahl der grünen Äpfel und r die Anzahl der roten Äpfel im Korb. Die gegebene Bedingung in der Aufgabenstellung kann als Gleichung

$$\frac{r}{g + r} = 42 \cdot \frac{g}{g + r} \cdot \frac{g - 1}{g + r - 1}$$

geschrieben werden und äquivalent zu

$$r^2 + (g - 1)r - 42g \cdot (g - 1) = 0$$

umgeformt werden. Dies kann man als quadratische Gleichung mit dem Parameter g und der Variablen r auffassen. Die Diskriminante

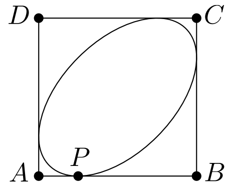
$$(g - 1)^2 + 168g \cdot (g - 1) = 169g^2 - 170g + 1$$

muss eine Quadratzahl sein, da ansonsten die Lösungen irrational wären. Wegen $g \geq 2$ erhält man die Ungleichungen

$$(13g - 6)^2 = 169g^2 - 156g + 36 > 169g^2 - 170g + 1 > 169g^2 - 208g + 64 = (13g - 8)^2.$$

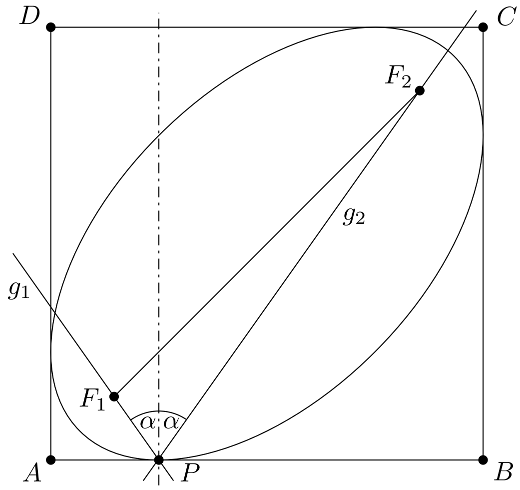
Deshalb muss $169g^2 - 170g + 1$ dem Term $(13g - 7)^2$ entsprechen, was zu $12g = 48$ und somit zu $g = 4$ führt. Die Lösungen der quadratischen Gleichung sind dann -24 und 21, aber wegen $r > 0$ ist nur $r = 21$ eine zulässige Lösung. Also sind 4 grüne und 21 rote Äpfel im Korb.

Aufgabe 53J / 43S. Gilbert Bates, ein sehr reicher Mann, will sich einen neuen Swimmingpool in seinem Garten bauen lassen. Da er symmetrische Formen sehr gern mag, sagt er seinem Gärtner, dass er einen ellipsenförmigen Pool innerhalb eines Quadrates $ABCD$ der Größe $10\,\mathrm{m} \times 10\,\mathrm{m}$ anlegen soll. Dieser ellipsenförmige Pool soll alle vier Seiten des Quadrates berühren, insbesondere die Seite AB im Punkt P, der genau $2.5\,\mathrm{m}$ von A entfernt ist. Der Gärtner, der genau weiß, wie man eine Ellipse konstruieren kann, wenn man die Brennpunkte und einen Punkt auf der Ellipse kennt, überlegt sich, dass er in diesem Fall aufgrund der vorgegebenen Symmetrie nur den Abstand der Brennpunkte benötigt. Kannst Du ihm helfen, den Abstand der Brennpunkte in Metern zu berechnen?



Ergebnis: 10

Lösungsweg: Die Aufgabenstellung wird gleich für einen allgemeineren Fall bewiesen. Dazu sei $ABCD$ ein Quadrat der Seitenlänge 1 mit der Ecke A im Ursprung eines Koordinatensystems. Der Punkt P liegt auf AB und hat die Koordinaten $(b, 0)$ mit $0 < b < \frac{1}{2}$. Aufgrund der notwendigen Symmetrie haben die Brennpunkte F_1 und F_2 die Koordinaten (f, f) und $(1-f, 1-f)$ mit $0 < f < \frac{1}{2}$, das heißt, sie liegen auf der Diagonalen AC und zwar symmetrisch zur anderen Diagonalen.



Die Geradengleichung der Geraden g_1 durch die Punkte P und F_1 ist gegeben durch

$$y = (x - b) \cdot \frac{f}{f - b}$$

und diejenige der Geraden g_2 durch die Punkte P und F_2 durch

$$y = (x - b) \cdot \frac{f - 1}{b + f - 1}.$$

Da die Normale auf AB im Punkt P den Winkel $\angle F_2 P F_1$ halbiert, ist die Steigung von g_2 das Negative der Steigung von g_1. Hieraus erhält man die Gleichung

$$\frac{f}{f - b} = (-1) \cdot \frac{f - 1}{b + f - 1},$$

die zu

$$f^2 - f + \frac{b}{2} = 0$$

vereinfacht werden kann. Diese quadratische Gleichung hat die zwei Lösungen $f_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 2b}\right)$, wobei jede zu einem Brennpunkt der Ellipse gehört. Den Abstand der Brennpunkte kann man nun mit dem Satz des Pythagoras berechnen und erhält $\sqrt{2 - 4b}$. Setzt man nun noch $b = \frac{1}{4}$ und skaliert das Ergebnis mit dem Faktor 10, so erhält man das gesuchte Resultat $\overline{F_1 F_2} = 10$.

Aufgabe 54J / 44S. Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ sei definiert durch $a_1 = 1$ und $a_n = \lfloor\sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}\rfloor$ für $n > 1$. Bestimme a_{1000}.

Hinweis: Dabei bezeichnet $\lfloor x\rfloor$ den ganzzahligen Anteil einer reellen Zahl x, das heißt die größte ganze Zahl kleiner gleich x.

Ergebnis: 495

Lösungsweg: Schreibt man die ersten Glieder $(1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, \dots)$ der gegebenen Folge auf, so erkennt man, dass die Zahl 1 viermal vorkommt, hingegen die Zahlen größer als 1 entweder zweimal oder dreimal. Nun kann man mit vollständiger Induktion die Vermutung beweisen, dass die Zahlen, die dreimal vorkommen genau die Potenzen von 2 sind.

Angenommen, man hat den Anfang der Folge bis zum ersten Vorkommen von n $(n > 1)$ aufgeschrieben und die Folge sieht bis dahin wie vermutet aus. Sei k die größte ganze Zahl mit $2^k < n$. Dann ist die Summe aller aufgeschriebenen Folgenglieder

$$s_1 = (1 + 2 + \cdots + n) + (1 + 2 + \cdots + n - 1) + (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k) + 1 = n^2 + 2^{k+1}.$$

Wegen $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k < 2n < 2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$ gilt $s_1 < (n + 1)^2$ und somit ist das nächste Folgenglied $\lfloor\sqrt{s_1}\rfloor = n$.

Zur Bestimmung des nächsten Folgengliedes betrachtet man die Summe $s_2 = s_1 + n = n^2 + n + 2^{k+1}$. Ist $2^{k+1} < n+1$, so folgt $s_2 < (n + 1)^2$ und das nächste Folgenglied ist wieder n. Nun ist aber k die größte ganze Zahl mit $2^k < n$, so dass $2^{k+1} \geq n$ gilt. Also tritt dieser Fall genau dann ein, wenn $2^{k+1} = n$ ist. Falls n keine Zweierpotenz ist, dann ist das nächste Folgenglied $n + 1$, weil $n + 1 \leq 2^{k+1} < 2n < 3n + 4$ gilt, was äquivalent zu $(n + 1)^2 \leq n^2 + n + 2^{k+1} < (n + 2)^2$ ist.

Nun bleibt im Fall $n = 2^{k+1}$ noch zu zeigen, dass nach einem dreimaligen Vorkommen von n das nächste Folgenglied $n + 1$ sein muss. Durch Berechnung der Summe $s_3 = s_2 + n = n^2 + 2n + 2^{k+1} = n^2 + 3n$ erhält man sofort $(n + 1)^2 < s_3 < (n + 2)^2$. Also ist der Induktionsschritt vollständig bewiesen.

Wegen $500 = a_{1010} = a_{1009}$ ergibt sich schließlich $a_{1000} = 495$.

Aufgabe 55J / 45S. Bestimme die Anzahl von 4×4–Tabellen mit nicht-negativen, ganzzahligen Einträgen, so dass

- es in jeder Zeile und in jeder Spalte höchstens zwei von Null verschiedene Einträge gibt und
- die Summe der Einträge in jeder Zeile und in jeder Spalte genau 3 ist.

Ergebnis: 576

Lösungsweg: Jede solche Tabelle kann man eindeutig als komponentenweise Summe zweier 4×4–Tabellen darstellen, wobei in der einen Tabelle in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine 1 und in der anderen Tabelle in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine 2 steht. Andererseits erzeugt jedes solche Paar von Tabellen durch komponentenweise Addition eine Tabelle, die die geforderten Bedingungen erfüllt. Für die Auswahl der besetzten Positionen hat man in jeder der beiden Tabellen unabhängig voneinander 4! Möglichkeiten, so dass $(4!)^2 = 576$ das gesuchte Resultat ist.