45. Österreichische Mathematik Olympiade

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene

1. April 2014

---

1. Man zeige: Es gibt keine positiven reellen Zahlen x, y, z mit
$$\left(12x^2+yz\right)\cdot\left(12y^2+xz\right)\cdot\left(12z^2+xy\right)=2014x^2y^2z^2\ .$$

2. Man bestimme alle Quadrupel (a,b,c,d) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:
$$\begin{aligned} ab+ac&=3b+3c\\ bc+bd&=5c+5d\\ ac+cd&=7a+7d\\ ad+bd&=9a+9b \end{aligned}$$

3. Die Folge $\langle a_n\rangle$ ist durch die Rekursion
$$a_{n+1}=5a_n^6+3a_{n-1}^3+a_{n-2}^2 \qquad \text{für } n\geq 2$$
und die Menge der Anfangswerte $\{a_0,a_1,a_2\}=\{2013,2014,2015\}$ festgelegt.
(Das heißt, die Anfangswerte sind diese drei Zahlen in *beliebiger* Reihenfolge.)

   Man zeige: Die Folge enthält keine sechste Potenz einer natürlichen Zahl.

4. Für einen Punkt P im Inneren des Dreiecks ABC seien D, E und F die Schnittpunkte der Ecktransversalen mit den Gegenseiten, also D der Schnittpunkt der Verlängerung von AP mit BC, E der Schnittpunkt der Verlängerung von BP mit AC und F der Schnittpunkt der Verlängerung von CP mit AB.

   Weiters seien Q und R die Schnittpunkte der Parallelen zu AB durch P mit den Seiten AC bzw. BC (in dieser Reihenfolge). Analog seien S und T die Schnittpunkte der Parallelen zu BC durch P mit den Seiten AB bzw. AC (in dieser Reihenfolge).

   In einem gegebenen Dreieck ABC bestimme man alle Punkte P, für die die Dreiecke PRD, PEQ und PTE denselben Flächeninhalt haben.

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.