DIREKTER BEWEIS

$\mathbf{A} \Longrightarrow \mathbf{B}$ ... aus Aussage A folgt Aussage B

Bei der direkten Beweismethode wird versucht, die Aussage direkt mit einem Beweis zu untermauern.

Aufgabe: Zeige: Das Quadrat einer geraden Zahl ist gerade.
anders formuliert: Ist n eine gerade Zahl, dann ist auch n^2 gerade.

hier ist A ... „n ist eine gerade Zahl"
hier ist B ... „n^2 ist eine gerade Zahl"

folgendes ist zu zeigen: n gerade $\Longrightarrow$ n^2 gerade

Beweis:

Wenn n eine gerade Zahl ist, ist sie sicher ein Vielfaches von 2.

$$n = 2k$$

Bilden wir nun das Quadrat:

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

Wir erkennen sofort, dass auch n^2 durch 2 teilbar und somit gerade sein muss (ganz unabhängig davon, welche Zahl sich hinter k^2 verbirgt), da bereits 4 durch 2 teilbar ist.

Der direkte Beweis ist somit geglückt. □

INDIREKTER BEWEIS (über Kontraposition)

$\mathbf{A} \Longrightarrow \mathbf{B} \Leftrightarrow \neg\mathbf{B} \Longrightarrow \neg\mathbf{A}$

Soll gezeigt werden, dass aus der Aussage A die Aussage B folgt, so kann stattdessen gezeigt werden, dass aus der verneinten Aussage B die verneinte Aussage A folgt. Begründung siehe Wahrheitstafel links.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w	w	f	f	w
w	f	f	f	w	f
f	w	w	w	f	w
f	f	w	w	w	w

Erkenntnis nebenbei:
Aus Falschem folgt Beliebiges

TIPP: Wenn du keinen Plan hast, wie du den direkten Beweis durchführen sollst, dann probiere einen indirekten.

Aufgabe: Zeige: Ist das Quadrat einer Zahl (also n^2) gerade, dann ist auch n gerade.

hier ist A ... „n^2 ist eine gerade Zahl"
hier ist B ... „n ist eine gerade Zahl"

folgendes ist somit zu zeigen: n^2 gerade $\Longrightarrow$ n gerade

Indirekter Beweis (über Kontraposition):

Verneinung von A ... „n^2 ist eine **un**gerade Zahl"
Verneinung von B ... „n ist eine **un**gerade Zahl"

Kontraposition ist zu zeigen: n ungerade $\Longrightarrow$ n^2 ungerade

Wenn n eine ungerade Zahl ist, dann ist sie nicht ohne Rest durch 2 teilbar. Der Rest ist hierbei immer 1.

$$n = 2k + 1$$

Bilden wir nun das Quadrat:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 2k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + k) + 1$$

Wir erkennen sofort, dass auch n^2 nicht ohne Rest durch 2 teilbar ist, weil die 1, die hinten steht, sicher nicht ohne Rest durch 2 teilbar ist. Somit ist n^2 ungerade.

Die Kontraposition wurde somit gezeigt und damit gleichzeitig die Gültigkeit der ursprünglichen Behauptung bewiesen. □

INDIREKTER BEWEIS (über Widerspruch)

$$\mathbf{A \Longrightarrow B \Leftrightarrow B \lor \neg A}$$

Die Behauptung „aus A folgt B" ist (logisch) gleichwertig zur Behauptung, dass B ODER nicht A gilt.

$$\mathbf{\neg(A \Longrightarrow B) \Leftrightarrow \neg B \land A}$$

Die Verneinung der Behauptung „aus A folgt B" ist (logisch) gleichwertig zur Behauptung, dass nicht B UND A gilt.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$ $B \lor \neg A$	$\neg(A \Rightarrow B)$ $\neg B \land A$
w	w	f	f	w	f
w	f	f	w	f	w
f	w	w	f	w	f
f	f	w	w	w	f

BEWEISIDEE: Es wird angenommen, dass die ursprüngliche Behauptung falsch ist und zeigt, dass sich daraus ein Widerspruch zur Annahme ergibt:

$$\mathbf{\neg B \land A \Longrightarrow B \lor \neg A}$$

TIPP: Wenn du keinen Plan hast, wie du den direkten Beweis durchführen sollst, dann probiere einen indirekten.

Aufgabe: Zeige: Das Quadrat einer geraden Zahl ist gerade.
anders formuliert: Ist n eine gerade Zahl, dann ist auch n^2 gerade.

hier ist A … „n ist eine gerade Zahl"
hier ist B … „n^2 ist eine gerade Zahl"

folgendes ist zu zeigen: n gerade $\Longrightarrow$ n^2 gerade

Indirekter Beweis (über Widerspruch):

Verneinung von A … „n ist eine **un**gerade Zahl"
Verneinung von B … „n^2 ist eine **un**gerade Zahl"

Widerspruch ist zu zeigen: n^2 ungerade UND n gerade $\Longrightarrow$ n^2 gerade ODER n ungerade

Wenn n eine gerade Zahl ist, ist sie sicher ein Vielfaches von 2, da jede gerade Zahl durch 2 dividierbar ist.

$$n = 2k$$

Bilden wir nun das Quadrat von n:

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

Wir erkennen sofort, dass auch n^2 durch 2 teilbar und somit gerade sein muss (ganz unabhängig davon, welche Zahl sich hinter k^2 verbirgt), da 4 durch 2 teilbar ist.

Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme, dass n^2 ungerade ist. Somit ist die verneinte ursprüngliche Behauptung falsch und die ursprüngliche Behauptung wahr.

BEISPIELE

Hier findest du einige weitere Beispiele, sie wurden im Mathe-WPG durchgemacht. Einige heikle und wesentliche Stellen habe ich kommentiert.

Viel Vergnügen, KOM.

Eine gerade Zahl mit sich selbst multipliziert ergibt immer eine gerade Zahl.

A … n gerade

B … n^2 gerade

n gerade $\Longrightarrow$ n^2 gerade

Annahme:
n ist gerade
$n \cdot n$ ist ungerade

A … n gerade

nicht B … n^2 gerade

(1) $n \in \mathbb{R}$

(2) Die Summe von geraden Termen ist immer gerade. Siehe Beispiel 3

„Beweis"

$n \cdot n = n + n + n + \ldots + n$

lt. (2) ist die Summe … immer gerade, also erhält man (ohne Rechnung) den Widerspruch zu oben. $\square$

Somit muss die ursprüngliche Behauptung (Angabe) wahr sein.

Zeige, dass für zwei reelle Zahlen a und b (jeweils ≥ 0) gilt

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

A … a und b (nichtneg.) reelle Zahlen

B … die angeg. Ungleichung gilt

A $\Longrightarrow$ B

Annahme: $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$

$$a+b < 2\sqrt{ab}$$
$$(a+b)^2 < 4ab$$
$$a^2+2ab+b^2 < 4ab$$
$$a^2-2ab+b^2 < 0$$
$$\underline{\underline{(a-b)^2 < 0}}$$

$\square$

… B wird verneint und man hofft, unter der Annahme, dass A gilt, einen Widerspruch herzuleiten.

hier wird gezeigt: $\neg\mathbf{B} \wedge \mathbf{A} \Longrightarrow \mathbf{B} \vee \neg\mathbf{A}$

… ein Quadrat kann (in der menge der reellen Zahlen) niemals negativ sein. Das ist ein Widerspruch dazu, dass a und b zwei (nichtnegative) reelle Zahlen sind.

Somit ist die verneinte ursprüngliche Behauptung falsch und die ursprüngliche Behauptung wahr.

BEISPIELE

Hier findest du einige weitere Beispiele, sie wurden im Mathe-WPG durchgemacht. Einige heikle und wesentliche Stellen habe ich kommentiert.

Viel Vergnügen, KOM.

Direkter Beweis

Bei der direkten Beweismethode wird versucht, die Aussage direkt mit einem Beweis zu untermauern.

Beispiel 3

Wird eine gerade Zahl mit sich selbst multipliziert, ist das Ergebnis immer eine gerade Zahl.

$$6 \cdot 6 = 6+6+6+6+6+6$$
$$= 2\cdot 3 + 2\cdot 3 + 2\cdot 3 + 2\cdot 3 + 2\cdot 3 + 2\cdot 3$$
$$= 2\cdot(3+3+3+3+3+3)$$

$\boxed{\text{Allgemein}}$ $\quad n = 2m$

$$n \cdot n = 2m + \ldots + 2m$$
$$= 2\cdot(m + \ldots + m)$$

d.h. n^2 ist durch 2 teilbar, also gerade

Beispiel 4

Für zwei reelle Zahlen a und b (jeweils ≥ 0) gilt:
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$$

Man beginnt hier von einer anderen, aber bereits bewiesenen Aussage:

$$(a-b)^2 \geq 0$$
$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$
$$a^2 + b^2 \geq 2ab \quad | +2ab$$
$$\cancel{\frac{a^2+b^2}{2} \geq a \cdot b}$$
$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$
$$\frac{(a+b)^2}{4} \geq ab \quad | \sqrt{}$$
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$$

$\square$

Beispiel 4

Für zwei reelle Zahlen a und b (jeweils ≥ 0) gilt:
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$$

KOM:

$$\mathbf{\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}}$$

$$\mathbf{a + b \geq 2 \cdot \sqrt{a \cdot b}}$$

$$\mathbf{(a+b)^2 \geq 4 \cdot a \cdot b}$$

$$\mathbf{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \geq 4 \cdot a \cdot b}$$

$$\mathbf{a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \geq 0}$$

$$\mathbf{(a-b)^2 \geq 0}$$

Wir sind fertig, weil das Quadrat einer reellen Zahl nichtnegativ ist.

Da in der letzten Zeile eine wahre Aussage steht und diese durch **Äquivalenzumformungen (man kann die Rechnung zeilenweise in beide Richtungen lesen)** aus der ersten Zeile gewonnen wurde, ist auch die erste Zeile war.

Bemerkung: die Nichtnegativität von a und b garantiert ein sorgenfreies Ziehen der Quadratwurzel.

INDUKTIONSBEWEIS

Die nächste Beweismethode wird benötigt, wenn man eine Behauptung **für alle natürlichen Zahlen** beweisen möchte.

Idee:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 = 1^2 \\ 1+3 &= 4 = 2^2 \\ 1+3+5 &= 9 = 3^2 \\ 1+3+5+7 &= 16 = 4^2 \\ 1+3+5+7+9 &= 25 = 5^2 \end{aligned}$$

Wir erkennen sofort, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen genau dem Quadrat der Anzahl der Summanden (also n^2) entspricht.

Besser gesagt: „Wir **vermuten**, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen…“

Die fünf Zeilen genügen natürlich nicht, um daraus schon auf die allgemeine Vermutung schließen zu können. Nicht einmal das Überprüfen der ersten 10 Millionen Fälle würde genügen. Was wir benötigen, ist eine Technik, um die Vermutung mit einem Schlag für alle (also unendlich viele) Summanden zu beweisen.

Alltag: Welche Hilfsmittel würdest du verwenden, um ein Dach zu erklimmen? Wahrscheinlich eine Leiter. Ist es zum Erklimmen einer Leiter wichtig, deren Höhe zu kennen? Nein. Das Wissen um die Technik des Leiterkletterns genügt. Was muss man dazu wissen?

Erstaunlicherweise nur zwei Dinge:

(1) Wie komme ich auf die **unterste** Leitersprosse?
(2) Wie komme ich von einer Leitersprosse **auf die nächst höhere** Sprosse?

Die mathematische Version des Leiterkletterns heißt ***vollständige Induktion***. Um sie korrekt durchzuführen, müssen wir ganz analog zur „ersten Leitersprosse“ einen Anfang für den Beweis finden.
Meist werden wir die zu beweisende Behauptung erst einmal in einem einfachen Fall überprüfen. Üblicherweise ist das der Fall für n = 0 (hier: 0 Summanden) oder n = 1 (hier: 1 Summand) aber jede andere natürliche Zahl kann ebenfalls als **Induktionsanfang** dienen.

Danach müssen wir eine Methode finden, mit der wir „den Schritt von einer zur nächsten Leitersprosse“ imitieren. Dabei gehen wir davon aus, dass wir uns bereits auf der n-ten Leitersprosse befinden und nehmen dadurch an, dass die Behauptung für n Summanden wahr ist. Das nennt man die **Induktionsannahme**.
Wir wollen nun von der n-ten auf die nächsthöhere Sprosse steigen. Im Falle der Leiter ist das ein einfacher Schritt... Im sogenannten **Induktionsschritt** leitet man aus der als wahr angenommenen Behauptung für n Summanden die Aussage für die Zahl n + 1 Summanden her.

Hat man das geschafft, ist der Induktionsbeweis geglückt, und man hat die Behauptung für alle natürlichen Zahlen (hier: beliebige Anzahl an Summanden) bewiesen. Genauer: Für alle natürlichen Zahlen größer als der Induktionsanfang.

Warum ist das so? Ausgehend vom Induktionsanfang (von der kleinsten natürlichen Zahl, für die die Behauptung wahr ist) können wir die Leiter so lange hinaufklettern bis die Behauptung auch für eine beliebige natürliche Zahl bewiesen ist.

Beispiel: Beweise die folgende Behauptung über die Summe ungerader Zahlen:

$$\underbrace{1+3+\cdots+2n-1}_{\text{n Stück}} = n^2$$

Beweis:

Induktionsanfang: Erste Leitersprosse n = 1 (***ein Summand***). In die Gleichung eingesetzt: $1 = 1^2$, was offensichtlich wahr ist.

Induktionsannahme: Wir nehmen an, dass die Behauptung für ***n Summanden*** wahr ist.

$$1+3+\cdots+2n-1 = n^2$$

Induktionsschritt: Die Gültigkeit der Behauptung für ***n + 1 Summanden*** ist zu zeigen.

$$1+3+\cdots+2n-1+\mathbf{2(n+1)-1} \stackrel{?}{=} (\mathbf{n+1})^2$$

Beginnen wir mit der linken Seite:

$$1+3+\cdots+2n-1+\mathbf{2(n+1)-1} = n^2+\mathbf{2(n+1)-1}$$

Was ist hier passiert? Die ersten n Summanden auf der linken Seite wurden durch die Induktionsannahme ersetzt. Das ist ein Standardtrick, der in Induktionsbeweisen häufig vorkommt. Weiter ergibt sich daraus:

$$n^2+2(n+1)-1 = n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

Das Ergebnis entspricht genau der rechten Seite im Induktionsschritt. Somit haben wir den Induktionsschritt abgeschlossen. Alles bewiesen, in einem Schritt, für alle natürlichen Zahlen.

$\square$

Kennzeichnen Sie den Schluss eines Beweises: Es ist äußerst ermüdend für einen Leser, wenn er sich nie sicher sein kann, wo ein Beweis beginnt und wo er genau endet. Als Kennzeichen für das Ende eines Beweises dienen manchmal Phrasen wie

- *Damit ist alles gezeigt.* oder
- *... was wir behauptet hatten.*

und ähnliche Sätze. Das zwingt den Leser dazu, den Beweis bis zum Ende zu lesen und erschwert es, sich einen schnellen Überblick zu verschaffen, speziell wenn mehrere Resultate und Zwischentexte aufeinander folgen. übersichtlicher sind die Standardabkürzungen

- *w.z.z.w* — was zu zeigen war — oder die lateinische Variante
- *Q.E.D.* (auch *q.e.d.* oder *qed.*) — quod erat demonstrandum.

In modernen Büchern hat sich das ökonomische Beweisabschlusszeichen, das meist am Ende der letzten Beweiszeile steht,

... $\square$

durchgesetzt.