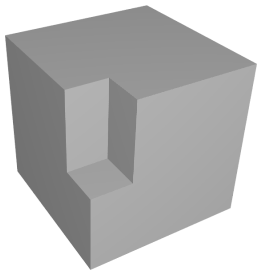
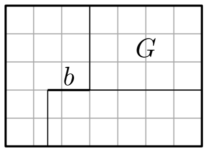
Aufgabe 1. Aus einem würfelförmigen Felsblock mit einem ursprünglichen Volumen von $216\,\mathrm{m}^3$ wurde ein quaderförmiges Stück der Größe $1\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}$ gehauen, wie in der Abbildung zu sehen ist. Wie groß ist die Oberfläche des neu entstandenen Objekts in m^2?



Ergebnis: 216

Lösungsweg: Wegen $6^3 = 216$ hat der Würfel eine Kantenlänge von $6\,\mathrm{m}$. Der herausgehauene Block verändert die Größe der Oberfläche nicht. Deshalb hat das entstandene Objekt die Oberfläche des Würfels, also $6 \cdot 6^2 = 216$, gemessen in m^2.

Aufgabe 2. Die beiden Freunde Christoph und Jonas haben den Jackpot geknackt und ein rechteckiges Grundstück mit den Seitenlängen $35\,\mathrm{m}$ und $25\,\mathrm{m}$ erworben. Sie wollen es mit einem Doppelhaus bebauen und den $300\,\mathrm{m}^2$ großen Garten G gemeinsam nutzen. Der Grundriss ist wie folgt:



Dabei beträgt der Abstand zweier Gitterlinien $5\,\mathrm{m}$. Wie lang ist die Mauer b, mit der das eine Haus in das andere hineinragt, wenn beide Häuser die gleiche Grundfläche haben sollen?

Ergebnis: $8.75\,\mathrm{m}$

Lösungsweg: Die Grundfläche eines Hauses beträgt die Hälfte von $35\,\mathrm{m} \cdot 25\,\mathrm{m} - 300\,\mathrm{m}^2 = 575\,\mathrm{m}^2$, also $287.5\,\mathrm{m}^2$. Da eine Seite des rechteckigen Hauses $10\,\mathrm{m}$ lang ist, muss die andere Seite $28.75\,\mathrm{m}$ lang sein. Daraus ergibt sich $b = 8.75\,\mathrm{m}$.

Aufgabe 3. Klein Markus möchte zum Baden an den Strand gehen. Er besitzt folgende unterscheidbare Badeutensilien: 5 Badehosen, 3 Strohhüte, 4 Sonnenbrillen und 5 T-Shirts. Die Strandbaderegeln schreiben vor, dass Markus eine Badehose tragen muss. Das Tragen von Strohhut, Sonnenbrille und T-Shirt ist nicht verpflichtend. Wenn er sich jedoch noch mit zusätzlichen Utensilien kleidet, benutzt er aus jeder Kategorie höchstens eines. Auf wie viele verschiedene Arten kann Markus korrekt gekleidet am Strand erscheinen?

Ergebnis: 600

Lösungsweg: Wenn man aus einer Kategorie kein Utensil benutzt, dann erhöht sich die Zahl der Möglichkeiten dort um 1. Beispielsweise hat Markus bei den Strohhüten die Möglichkeit, einen seiner drei Hüte aufzusetzen oder eben keinen, was insgesamt für die Hüte 4 Möglichkeiten ergibt. Analog gibt es somit 5 Möglichkeiten für die Sonnenbrillen und 6 Möglichkeiten für die T-Shirts. Weil Markus eine Badehose anziehen muss, kann er auf insgesamt $5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 600$ Arten korrekt gekleidet am Strand erscheinen.

Aufgabe 4. Laura verbrachte ihren Urlaub im Regenwald. Jeden Tag regnete es entweder am Vormittag oder am Nachmittag oder aber den ganzen Tag lang. Es gab 13 Tage, an denen es zu Lauras Freude nicht den ganzen Tag regnete. Allerdings erlebte sie genau 11 verregnete Vormittage und 12 verregnete Nachmittage. Wie lange war Lauras Urlaub?

Ergebnis: 18 Tage

Lösungsweg: Sei x die Anzahl an Lauras Urlaubstagen. Dann hatte sie an $x - 11$ Tagen einen regenfreien Vormittag und an $x - 12$ Tagen einen regenfreien Nachmittag. Da die Anzahlen dieser beider Arten von Tagen genau 13 ergibt, erhält man aus

$$(x - 11) + (x - 12) = 13$$

zuerst $2x = 36$ und schließlich $x = 18$.

Aufgabe 5. Finde die kleinste nicht-negative ganze Zahl, die Lösung der Gleichung

$$n - 2 \cdot \mathrm{Q}(n) = 2016$$

ist!

Hinweis: Hierbei steht $\mathrm{Q}(n)$ für die Quersumme der Zahl n.

Ergebnis: 2034

Lösungsweg: Die Zahl $n - \mathrm{Q}(n)$ ist immer ein Vielfaches von 9. Weil 2016 durch 9 teilbar ist, muss folglich $\mathrm{Q}(n)$ und damit auch n durch 9 teilbar sein. Offensichtlich muss $n > 2016$ gelten. Also probiert man die nächst größeren durch 9 teilbaren Zahlen und findet bei 2034 die gesuchte Zahl.

Aufgabe 6. Wie viele positive ganze Zahlen haben die Eigenschaft, dass ihre erste Ziffer (von links gelesen) mit der Anzahl ihrer Ziffern übereinstimmt?

Ergebnis: 111 111 111

Lösungsweg: Von den einstelligen Zahlen erfüllt nur die 1 die geforderte Bedingung. Nun werden mehrstellige Zahlen betrachtet. Für eine Ziffer $n \neq 0$ gibt es genau 10^{n-1} Zahlen, die mit der Ziffer n an erster Stelle von links starten und die Bedingung in der Aufgabenstellung erfüllen. Dies sind nämlich alle Zahlen zwischen $\overline{n0\ldots0}$ und $\overline{n9\ldots9}$. Deshalb gibt es insgesamt

$$1 + 10 + \cdots + 100\,000\,000 = 111\,111\,111$$

solche Zahlen.

Aufgabe 7. Eine Bodenpflasterung besteht aus vielen verschiedenartigen Fliesen, von denen eine die Form eines regulären n-Ecks hat und rundherum nahtlos von anderen Fliesen umgeben ist. Wenn man diese eine Fliese herausnimmt und sie um $48°$ um ihren Mittelpunkt dreht, so passt sie wieder an ihren Platz. Wie lautet die kleinste Zahl n, für die das möglich ist?

Ergebnis: 15

Lösungsweg: Ein reguläres n-Eck wird bei einer Drehung um seinen Mittelpunkt M genau dann auf sich selber abgebildet, wenn der Drehwinkel ein Vielfaches des Winkels ist, der bei M entsteht, wenn man M mit zwei benachbarten Ecken des n-Ecks verbindet. Letzterer Winkel ist $360°/n$. Also ist die kleinste positive ganze Zahl gesucht, für die

$$48 : \frac{360}{n} = \frac{2}{15}n$$

ganzzahlig ist. Das Ergebnis lautet $n = 15$.

Aufgabe 8. Ein Tag soll *Glückstag* heißen, wenn sein im Format *TT.MM.JJJJ* geschriebenes Datum aus acht verschiedenen Ziffern besteht. Dabei steht *TT* für den Tag, *MM* für den Monat und *JJJJ* für das Jahr, wobei Tage und Monate unter 10 mit führender Null geschrieben werden. Beispielsweise war der 26.04.1785 ein Glückstag. Wann wird vom heutigen Tag aus gesehen der nächste Glückstag sein?

Ergebnis: 17.06.2345

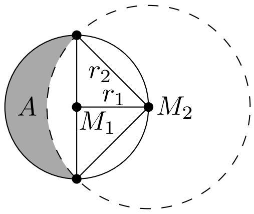
Lösungsweg: In allen kommenden Jahren der Form $20{*}{*}$ kann es keinen Glückstag geben, denn es lässt sich kein passender Monat finden. Sollen Jahre $21{*}{*}$ zu einem Glückstag führen, so muss der Monat eine 0 enthalten, weshalb es dann unmöglich wird, einen geeigneten Tag zu finden. Nun werden Jahre der Form $23{*}{*}$ betrachtet. Der Monat eines Glückstages muss dann eine 0 enthalten und der Tag muss folglich mit 1 beginnen. Als nächst gelegenes Jahr kommt 2345 mit dem Monat 06 in Frage und tatsächlich kann man einen Glückstag finden. Indem man noch die 17 als Tag setzt, erhält man den 17.06.2345 als den gesuchten Glückstag.

Aufgabe 9. Wie viele Ebenen gibt es, die genau vier Ecken eines gegebenen Quaders enthalten?

Ergebnis: 12

Lösungsweg: Die sechs Ebenen, in denen jeweils eine Quaderseite liegt, sind offensichtlich von der gesuchten Sorte. Außerdem gibt es für jedes Paar gegenüber liegender Seitenflächen des Quaders noch zwei darauf senkrecht stehende Ebenen, die jeweils eine Diagonale dieser Seitenflächen und damit vier Ecken des Quaders enthalten. Insgesamt sind es 12 Ebenen der geforderten Art.

Aufgabe 10. Klein Sandra möchte mit Zirkel und Lineal eine schöne Mondsichel zeichnen. Zuerst zieht sie einen Kreis um einen Punkt M_1 mit dem Radius $r_1 = 3\,\text{cm}$. Anschließend wählt sie einen Punkt M_2 auf der Kreislinie und zeichnet einen zweiten Kreis um M_2 mit einem Radius r_2, so dass die beiden Schnittpunkte mit dem ersten Kreis auf einem Durchmesser durch M_1 liegen, wie in der Skizze zu sehen ist.



Wie groß ist der Flächeninhalt der Mondsichel A in cm^2?

Ergebnis: 9

Lösungsweg: Um den Flächeninhalt der Mondsichel zu berechnen, zieht man vom Halbkreis um M_1 mit Radius r_1 das Segment ab, das vom Kreis um M_2 mit Radius r_2 ausgeschnitten wird. Letzteres bestimmt man als Differenz des Viertelkreises mit Radius r_2 und des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks mit der Schenkellänge r_2. Nach dem Satz des Pythagoras gilt $r_2^2 = 2r_1^2$, sodass sich die gesuchte Fläche ergibt als

$$\frac{\pi r_1^2}{2} - \left(\frac{\pi r_2^2}{4} - r_1^2\right) = r_1^2 = 9\,\text{cm}^2.$$

Aufgabe 11. Alle Diener von König Octopus haben sechs, sieben oder acht Beine. Diejenigen mit sieben Beinen lügen immer, die mit sechs oder acht Beinen sagen immer die Wahrheit. Eines Tages versammelte der König vier seiner Diener und fragte sie, wie viele Beine die vier insgesamt hätten. Der erste Diener antwortete, dass die Gesamtzahl an Beinen 25 ist, der nächst behauptete, es seien 26, der dritte sagte 27 und der letzte gab 28 als Antwort. Wie viele Beine hatten die Wahrheit sagenden Diener unter diesen vieren dabei insgesamt?

Ergebnis: 6

Lösungsweg: Da nur eine der vier Antworten richtig sein kann, gibt es unter den vier Dienern des Königs entweder drei oder vier Lügner. Bei vier lügenden Dienern ist die Gesamtzahl der Beine 28, was ein Widerspruch zur Antwort des letzten Dieners ist. Also haben die lügenden Diener miteinander 21 Beine. Nun kann aber der einzige nicht lügende Diener keine acht Beine haben, weil sich dann 29 als Gesamtzahl der Beine ergibt, was aber nicht unter den Antworten vorkommt. Folglich hatte der die Wahrheit Sagende sechs Beine (und er war der Diener, der dem König als dritter eine Antwort gab).

Aufgabe 12. Ein Kiosk bietet Schokoladentafeln der Sorten Milchschokolade, weiße Schokolade und dunkle Schokolade zum gleichen Preis an. Eines Tages wurden Milchschokoladentafeln für 270 Euronen verkauft, weiße Schokoladentafeln für 189 Euronen und dunkle Schokoladentafeln für 216 Euronen. Was ist die kleinste Gesamtanzahl an Schokoladentafeln, die an diesem Tag verkauft worden sein könnten?

Ergebnis: 25

Lösungsweg: Der Preis einer Tafel Schokolade muss ein gemeinsamer Teiler von 270, 189 und 216 sein. Soll die Gesamtanzahl an Tafel minimal sein, so muss der Preis so hoch wie möglich sein. Das bedeutet, der Preis einer Tafel ist gleich dem größten gemeinsamen Teiler $\text{ggT}(270, 189, 216) = 27$. Bei diesem Preis können

$$\frac{270}{27} + \frac{189}{27} + \frac{216}{27} = 10 + 7 + 8 = 25$$

Tafeln verkauft werden.

Aufgabe 13. Ein Vater von fünf Kindern möchte für seine Familie für den Nachmittagstee Gebäckstücke besorgen. Er weiß aus leidvoller Erfahrung, dass er entweder allen Kindern dieselbe Gebäcksorte geben oder lauter verschiedene Gebäckstücke verteilen muss. Andernfalls bricht Streit unter den Kindern aus.

Als eines Tages nach langer Diskussion um die Art der Gebäckstücke keine Einigung erreicht werden konnte, wies der Vater entnervt seine jüngste Tochter Anna an: „Du gehst jetzt in die Bäckerei und sagst der Verkäuferin, dass sie dir ganz willkürlich x Gebäckstücke geben soll! Wenn Du damit wieder zurück bist, bekommt jedes Kind genau eines davon, die verbleibenden erhalten Mama und Papa!“ Er sagte dies im Wissen, dass die Bäckerei mehr als fünf verschiedene Sorten an Gebäck anbietet und dass von jeder Sorte auch reichlich Gebäckstücke vorhanden sind.

Welche Anzahl x an Gebäckstücken wählte der Vater, so dass auf alle Fälle der Familienfriede gewahrt werden konnte und gleichzeitig seine Unkosten möglichst gering gehalten wurden?

Ergebnis: 17

Lösungsweg: Wenn Anna 16 oder weniger Gebäckstücke zufällig erhält, kann dies den Familienfrieden nicht in jedem Fall sicherstellen. Beispielsweise gibt es bei 4 Kolatschen, 4 Mohnschnecken, 4 Krapfen und 4 Bärentatzen weder fünf paarweise verschiedene Gebäcksorten noch fünf Gebäckstücke derselben Sorte.
Wenn Anna sich von der Verkäuferin 17 willkürlich ausgewählte Gebäckstücke geben lässt, dann können es fünf oder mehr Sorten an Gebäck sein und die Kinder sind glücklich. Andernfalls gibt es höchstens vier verschiedene Sorten. Dann aber folgt aus $17 = 4 \cdot 4 + 1$ mit dem Schubfachprinzip, dass es eine Sorte an Gebäck gibt, von der mindestens fünf Stücke vorhanden sind. Also können auch in diesem Fall die Kinder zufriedengestellt werden.
Der Vater beauftragte also Anna, die Verkäuferin willkürlich 17 Gebäckstücke auswählen zu lassen.

Aufgabe 14. In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte eines Kreises und eines Quadrates, wenn beide geometrischen Figuren denselben Umfang besitzen?
Notiere das Verhältnis in der Form *Flächeninhalt des Kreises zu Flächeninhalt des Quadrats*!

Ergebnis: $4 : \pi$

Lösungsweg: Sei r der Radius des Kreises und s die Seitenlänge des Quadrats. Da beide Figuren denselben Umfang besitzen, gilt $2r\pi = 4s$ und somit $r\pi = 2s$. Mit den Formeln $r^2\pi$ für die Fläche des Kreises und s^2 für die des Quadrats kann man dann das gesuchte Verhältnis wie folgt berechnen:

$$\frac{r^2\pi}{s^2} = \frac{r^2\pi^2}{s^2\pi} = \frac{4s^2}{s^2\pi} = \frac{4}{\pi}$$

Aufgabe 15. Im letzten Februar besuchte Steven die Kokos-Inseln mit seinem Privatjet. Er startete von seiner Villa in Europa um 10:00 Uhr Mitteleuropäischer Zeit (MEZ) und landete auf den Kokos-Inseln am darauf folgenden Tag um 5:30 Uhr Ortszeit (Cocos Islands Time, CCT). Als er wieder zurück flog, startete er um 8:30 Uhr CCT und landete um 17:00 Uhr MEZ des selben Tages zu Hause. Sein Hinflug dauerte genau so lange wie sein Rückflug. Wie viel Uhr war es auf den Kokos-Inseln, als Steven in Europa landete?

Ergebnis: 22:30 Uhr

Lösungsweg: Sei d die Dauer eines Fluges und s der Zeitunterschied zwischen Europa (MEZ) und den Kokos-Inseln (CCT) in Stunden. Die Aussagen können dann durch die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} d + s &= 19.5, \\ d - s &= 8.5 \end{aligned}$$

beschrieben werden. Als Lösung erhält man $d = 14$ und $s = 5.5$. Folglich zeigte die Uhr auf den Kokos-Inseln die Uhrzeit 22:30 Uhr an, als Steven um 17 Uhr in Europa landete.

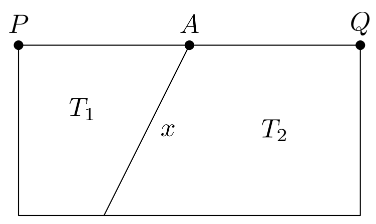
Hinweis: Es gibt die Kokos-Inseln tatsächlich! Sie liegen im indischen Ozean und zwar in der Zeitzone GMT+6:30, was genau MEZ+5:30 bedeutet.

Aufgabe 16. Bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, so dass für die Zahlen 14, 20 und n die folgende Bedingung erfüllt ist:
Wenn man irgendwelche zwei dieser drei Zahlen multipliziert, so ist das Ergebnis stets durch die dritte Zahl teilbar.

Ergebnis: 70, 140, 280

Lösungsweg: Da n das Produkt $14 \cdot 20 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$ teilt, können in der Primfaktorzerlegung von n nur die Primzahlen 2, 5 und 7 vorkommen, und zwar die 2 höchstens dreimal als Faktor und die 5 sowie die 7 höchstens einmal. Aus der Teilbarkeitsbedingung $14 \mid 20n$ folgt, dass n ein Vielfaches von 7 ist, aus der Bedingung $20 \mid 14n$, dass n ein Vielfaches von 10 ist. Somit ist n auch ein Vielfaches von 70. Wegen der Beschränkung $n \leq 2^3 \cdot 5 \cdot 7$ kommen für n nur die Zahlen 70, 140 und 280 in Frage. Man prüft leicht nach, dass diese drei Zahlen tatsächlich die gestellten Anforderungen erfüllen.

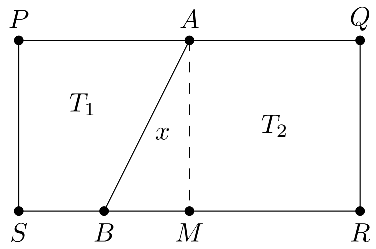
Aufgabe 17. Ein Rechteck wird durch die Strecke x in zwei Trapeze T_1 und T_2 zerlegt, wie in der Skizze zu sehen ist. Dabei sind die Längen $\overline{PA} = 10\,\text{cm}$ und $\overline{AQ} = 8\,\text{cm}$ sowie die Flächeninhalte $\text{F}(T_1) = 90\,\text{cm}^2$ und $\text{F}(T_2) = 180\,\text{cm}^2$ gegeben.



Wie lang ist die Strecke x in cm?

Ergebnis: 17

Lösungsweg: Wie in folgender Skizze seien R und S die beiden anderen Eckpunkte des Rechtecks, B der zweite Endpunkt von x und M derjenige Punkt auf der Seite SR, so dass $\overline{SM} = \overline{PA} = 10$ gilt.



Aus $\overline{PQ} = 18$ und der Berechnung $180 + 90 = 270$ für den Flächeninhalt des Rechtecks $PQRS$ folgt nun $\overline{PS} = \overline{QR} = 270 : 18 = 15$. Die Formel für die Berechnung des Flächeninhalts des Trapezes T_2 lautet

$$180 = \frac{1}{2} \cdot (\overline{BR} + \overline{AQ}) \cdot \overline{QR},$$

woraus sich $\overline{BR} = 16$ ergibt. Folglich ist $\overline{BM} = \overline{BR} - \overline{MR} = 8$ und mit dem Satz des Pythagoras findet man

$$x = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2} = \sqrt{289} = 17.$$

Aufgabe 18. Elisabeth erntet Erdbeeren aus dem eigenen Garten. Sie möchte die Beeren unter ihren vier Söhnen verteilen und zwar so, dass sie jedem von ihnen mindestens drei Erdbeeren gibt und dass Valentin dabei mehr Erdbeeren als Benedikt, Benedikt mehr als Ferdinand und Ferdinand mehr als Michael bekommt. Jeder Junge kennt die Anzahl der Beeren, die er selber erhalten hat, die Anzahl der insgesamt verteilten Erdbeeren sowie die oben beschriebenen Verteilungsregeln. Wie sollte Elisabeth die Erdbeeren verteilen, damit sie möglichst wenige Beeren austeilen muss und keiner ihrer Söhne die komplette Verteilung herausfinden kann?
Notiere eine Verteilung in der Form (M, F, B, V).

Ergebnis: (3, 5, 6, 8)

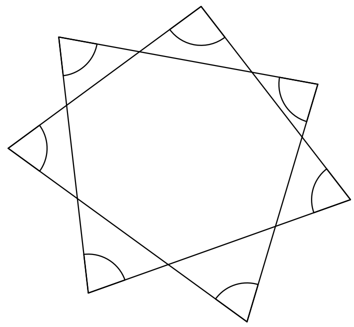
Lösungsweg: Offensichtlich muss Elisabeth mindestens $3 + 4 + 5 + 6 = 18$ Erdbeeren verteilen. Wenn sie 18, 19, 20 oder 21 Beeren verteilt, dann kann Valentin stets die gesamte Verteilung erschließen. Teilt die Mutter 22 Beeren aus, so folgt aus den gegebenen Bedingungen, dass Valentin 7, 8, 9 oder 10 Erdbeeren haben kann. Falls er 7, 9 oder 10 Beeren erhalten hat, kann er wiederum die gesamte Verteilung herausbekommen, bei 8 Beeren kann er das nicht. Man untersucht also noch diejenigen Verteilungen von 22 Beeren, in denen Valentin 8 Beeren hat, nämlich $(3, 4, 7, 8)$ und $(3, 5, 6, 8)$. In der ersten davon kann Benedikt die Verteilung erschließen, in der zweiten hingegen ist es keinem der vier Brüder möglich. Daher ist $(3, 5, 6, 8)$ die gesuchte Verteilung.

Aufgabe 19. Die natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 werden der Reihe nach im Uhrzeigersinn entlang einer Kreislinie aufgeschrieben. Beginnend mit der 1 wird im Uhrzeigersinn jede fünfzehnte Zahl markiert, also 1, 16, 31, usw. Diese Prozedur wird so lange fortgeführt, bis eine Zahl markiert werden muss, die bereits eine Markierung besitzt. Wie viele nicht markierte Zahlen sind am Ende dieses Verfahrens vorhanden?

Ergebnis: 800

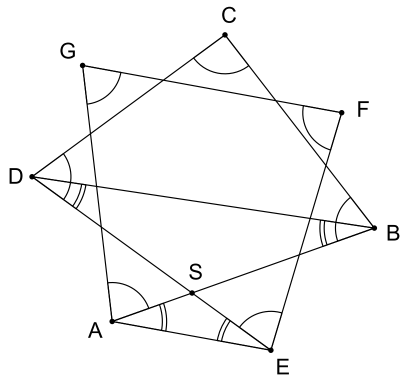
Lösungsweg: Das Markieren beginnt bei 1, 16, 31, 46 und endet im ersten Durchlauf mit 991. Diese Zahlen sind alle von der Form $15k + 1$ für passende nicht-negative Zahlen k. Also ist 6 die erste markierte Zahl im zweiten Durchgang und 996 die letzte, was bedeutet, dass hierbei sämtliche Zahlen der Form $15k + 6$ markiert werden. Das nächste Mal startet der Durchgang bei 11 und endet mit dem Markieren von 986, was dazu führt, dass im nächsten Schritt wieder die 1 drankommt und der Zyklus endet. Diesmal werden sämtliche Zahlen der Form $15k + 11$ markiert. Man erkennt, dass insgesamt alle Zahlen der Form $5k + 1$ markiert worden sind, und das ist ein Fünftel aller Zahlen auf der Kreislinie. Folglich gibt es am Ende der Prozedur $\frac{4}{5} \cdot 1000 = 800$ nicht markierte Zahlen.

Aufgabe 20. Bestimme die Summe der sieben markierten Innenwinkel dieses 7-zackigen Sterns in Grad!



Ergebnis: 540°

Lösungsweg: Bezeichne die Spitzen des Sterns wie in der folgenden Abbildung mit A, B, ..., G und den Schnittpunkt von ED und AB mit S. Zeichnet man die Hilfslinien DB und AE ein, so erkennt man, dass die beiden Winkelsummen $\angle SDB + \angle DBS$ und $\angle EAS + \angle SEA$ gleich sind, da sie in den Dreiecken $\triangle DSB$ und $\triangle AES$ jeweils den gleichen Winkel auf 180° ergänzen.



Somit ist die gesuchte Winkelsumme die Summe der Innenwinkel im Viereck $AEFG$ plus die Summe der Innenwinkel im Dreieck $\triangle DBC$, also $360° + 180° = 540°$.

Aufgabe 21. Die Schüler sollten das arithmetische Mittel der Zahlen 1, 3, 6, 7, 8 und 10 ausrechnen. Doch leider hatte Lucy einen falschen Ansatz gemacht: Sie wählte zwei der Zahlen und berechnete deren arithmetisches Mittel. Anschließend bildete sie das arithmetische Mittel aus ihrem Ergebnis und einer weiteren Zahl aus der Liste. Sie fuhr so mit ihrer Berechnung fort, bis sie alle gegebenen Zahlen abgearbeitet hatte. Wie groß ist die größtmögliche Abweichung zum tatsächlichen Ergebnis, die man mit Lucys Art der Berechnung erreichen kann?

Ergebnis: $\frac{17}{6}$

Lösungsweg: Lucys Vorgehensweise ist die folgende: Sie nimmt der Reihe nach die Zahlen $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ und berechnet die Summe

$$S = \left(\left(\left(\left((a_1 + a_2) \cdot \frac{1}{2} + a_3\right) \cdot \frac{1}{2} + a_4\right) \cdot \frac{1}{2} + a_5\right) \cdot \frac{1}{2} + a_6\right) \cdot \frac{1}{2},$$

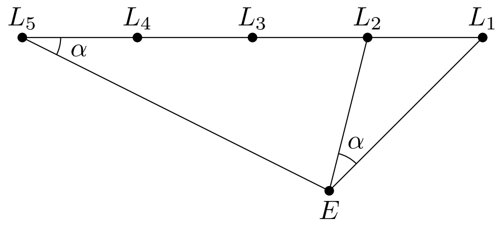
was nichts anderes ist als

$$S = \frac{a_1}{2^5} + \frac{a_2}{2^5} + \frac{a_3}{2^4} + \frac{a_4}{2^3} + \frac{a_5}{2^2} + \frac{a_6}{2^1}.$$

Wählt sie die Zahlen a_1, ..., a_6 der Größe nach in aufsteigender Reihenfolge, so erzielt sie für die Summe S den höchsten Wert, denn die größte Zahl wird durch die kleinste Zweierpotenz dividiert, die zweitgrößte Zahl durch die zweitkleinste Zweierpotenz, etc. Analog wird der kleinste Wert für S dadurch erreicht, dass die Zahlen a_1, ..., a_6 der Größe nach absteigend geordnet sind. Offensichtlich tritt die größmögliche Abweichung zum tatsächlichen Ergebnis in einem dieser beiden extremalen Fälle auf.

Das arithmetische Mittel der gegebenen Zahlen ist $\frac{35}{6}$. Bei der aufsteigenden Anordnung erhält man $S = \frac{67}{8}$, was einen Absolutfehler von $\frac{61}{24}$ zur Folge hat. Bei der absteigenden Anordnung ergibt sich $S = 3$ mit einer Abweichung von $\frac{17}{6}$ vom wahren Wert. Wegen $\frac{17}{6} > \frac{61}{24}$ ist $\frac{17}{6}$ das Ergebnis.

Aufgabe 22. Fünf kleine Straßenlaternen L_1, L_2, L_3, L_4 und L_5 stehen im Abstand von je 12 m auf einer Seite einer geraden Straße. Auf der gegenüber liegenden Straßenseite befindet sich eine Eisdiele. Steht Julien vor dem Eingang E der Eisdiele, so sieht er die Laternen L_1 und L_2 unter einem Winkel von $\alpha = 27°$. Steht er an der Laterne L_5, so sieht er L_1 und E auch unter dem Winkel $27°$.



Wie groß ist der Abstand von L_1 nach E?

Ergebnis: 24 m

Lösungsweg: Die Dreiecke $\triangle EL_1L_2$ und $\triangle EL_1L_5$ sind ähnlich, da die Winkel α und $\angle L_5L_1E = \angle L_2L_1E$ in beiden Dreiecken auftreten. Also gilt

$$\frac{\overline{EL_1}}{\overline{L_2L_1}} = \frac{\overline{L_5L_1}}{\overline{EL_1}} \quad \text{bzw.} \quad \overline{EL_1}^2 = \overline{L_2L_1} \cdot \overline{L_5L_1} = 12 \cdot 48 = 576,$$

woraus man den gesuchten Abstand $\overline{EL_1} = 24\,\mathrm{m}$ erhält.

Aufgabe 23. Nadja wählte aus den Zahlen 1, 2, 3, ..., 17 zwei verschiedene aus und multiplizierte sie. Zu ihrem Erstaunen war der Wert dieses Produktes gleich der Summe der fünfzehn Zahlen, die sie nicht ausgewählt hatte. Welche Zahlen hatte Nadja sich ausgesucht?

Ergebnis: 10 und 13

Lösungsweg: Es seien a und b die beiden Zahlen, die die gegebene Bedingung erfüllen. Weil die Summe der Zahlen von 1 bis 17 den Wert 153 ergibt, gilt die Gleichung $153 - (a + b) = ab$. Diese ist äquivalent zu $153 = ab + a + b$ und führt nach Addition von 1 auf beiden Seiten zur Gleichung $154 = ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$. Nun ist aber $154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$ und es gilt für die beiden Zahlen $a + 1$ und $b + 1$ die Beschränkung $2 \leq a + 1, b + 1 \leq 18$. Deshalb ist $154 = 11 \cdot 14$ die gesuchte Faktorisierung. Folglich sind 10 und 13 die gesuchten Zahlen.

Aufgabe 24. Wie viele 6-Tupel (a, b, c, d, e, f) positiver ganzer Zahlen erfüllen die Bedingungen $a > b > c > d > e > f$ und $a + f = b + e = c + d = 30$ gleichzeitig?

Ergebnis: $\binom{14}{3} = 364$

Lösungsweg: Schreibe das Tupel als

$$(a, b, c, d, e, f) = (15 + x, 15 + y, 15 + z, 15 - z, 15 - y, 15 - x)$$

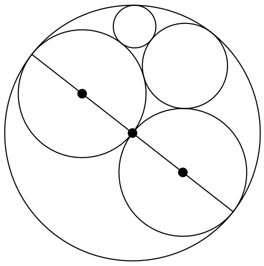
mit $0 \leq x, y, z < 15$. Die Bedingung $a > b > c > d > e > f$ ist dann äquivalent zu $x > y > z > 0$, was bedeutet, dass das Tupel eindeutig bestimmt ist durch die Wahl von drei paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen, die kleiner als 15 sind. Folglich gibt es $\binom{14}{3} = 364$ solcher Tupel.

Aufgabe 25. Eine Zeitbombe ist mit einem Display ausgestattet, das die Zeit bis zur Explosion in Minuten und Sekunden anzeigt. Das Rückwärtszählen beginnt mit der Anzeige 50:00 am Display. Jedesmal wenn die angezeigte Zahl an Minuten gleich der angezeigten Zahl an Sekunden ist (beispielsweise 15:15) oder wenn die Zahl auf dem Display von rechts gelesen die gleiche ist wie die angezeigte Zahl (wie bei 15:51), dann blinkt ein Lämpchen auf. Die Bombe kann deaktiviert werden, wenn das Lämpchen zum 70. Mal aufleuchtet. Welche Zeit wird auf dem Display angezeigt, wenn die Bombe deaktiviert werden kann?

Ergebnis: 03:03

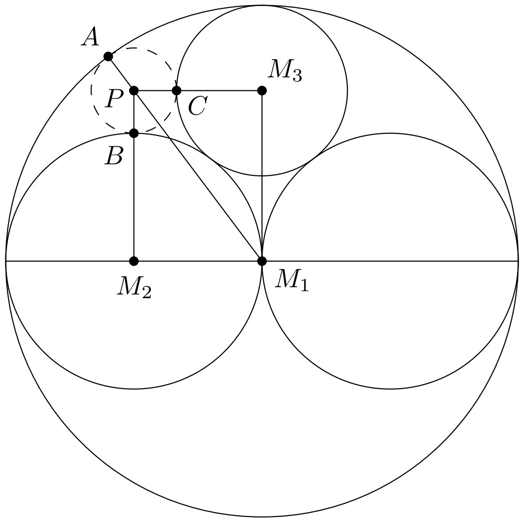
Lösungsweg: Einmal pro Minute ist die Zahl der angezeigten Minuten gleich der Zahl der angezeigten Sekunden. Dies passiert in 50 Minuten genau 50 Mal. Dass die Zahl auf dem Display von rechts gelesen die gleiche ist wie die angezeigte Zahl, kommt in einer Minute je einmal mit jeder Ziffer 0, 1, ..., 5 als Einerziffer der Minutenanzeige vor, insgesamt also 30 Mal. Allerdings gibt es fünf Zeiten, nämlich 00:00, 11:11, 22:22, 33:33 und 44:44, die in beiden Fällen und deshalb doppelt gezählt werden. Bis die Zeit auf 00:00 heruntergelaufen ist und die Bombe explodiert, blinkt das Lämpchen also $50 + 30 - 5 = 75$ Mal auf, wobei 00:00 bei der Zählung mit eingeschlossen ist. Die Bombe kann also beim sechstletzten Aufblinken des Lämpchens deaktiviert werden. Die letzten fünf sind die mit der Anzeige 00:00, 01:01, 01:10, 02:02 und 02:20, folglich blinkt das Lämpchen zum 70. Mal, wenn auf dem Display 03:03 zu sehen ist.

Aufgabe 26. Fünf Kreise berühren einander, wie in der Abbildung zu sehen ist. Finde den Radius des kleinsten Kreises, wenn der Radius des größten Kreises 2 ist und die beiden anderen Kreise mit den markierten Mittelpunkten jeweils den Radius 1 haben.



Ergebnis: $\frac{1}{3}$

Lösungsweg: Wie in der folgenden Abbildung seien mit M_1, M_2 und M_3 die Mittelpunkte der Kreise und mit r_3 der Radius des zweitkleinsten Kreises bezeichnet.



Aufgrund der Symmetrie der Figur gilt $M_1M_2 \perp M_1M_3$ und man erhält mit dem Satz des Pythagoras aus der Gleichung

$$\overline{M_1M_2}^2 + \overline{M_1M_3}^2 = \overline{M_2M_3}^2 \quad \text{bzw.} \quad 1 + (2 - r_3)^2 = (1 + r_3)^2$$

den Wert $r_3 = \frac{2}{3}$. Nun definiere den Punkt P als denjenigen Punkt, der M_1, M_2 und M_3 zu einem Rechteck vervollständigt. Seien außerdem A, B und C die Schnittpunkte der Strahlen $[M_1P$, $[M_2P$ bzw. $[M_3P$ mit den entsprechenden Kreisen, wie in der Skizze angegeben. Da $M_2M_1M_3P$ ein Rechteck ist, ergeben sich die Längen $\overline{PB} = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$, $\overline{PC} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ und $\overline{PA} = 2 - \overline{M_2M_3} = 2 - (1 + r_3) = \frac{1}{3}$. Folglich hat der Punkt P zu allen drei Punkten A, B und C den Abstand $\frac{1}{3}$, weshalb die Punkte A, B und C auf dem Kreis um P mit Radius $\frac{1}{3}$ liegen. Aufgrund der vorliegenden Situation sind diese drei Punkte genau die Berührpunkte an die entsprechenden Kreise, sodass der Kreis um P mit Radius $\frac{1}{3}$ genau der kleine Kreis in der gegebenen Skizze sein muss. Somit ist $\frac{1}{3}$ der gesuchte Radius.

Aufgabe 27. Im Casino sitzen einige Leute beim Roulette an einem großen Tisch. Als Erich mit seinem Guthaben von 16 000 Euronen den Tisch verlässt, sinkt das durchschnittliche Guthaben aller Spieler um 1 000 Euronen. Es vermindert sich nochmal um 1 000 Euronen, als die beiden Zockerinnen Bettina und Elfi an diesem Tisch mit jeweils 2 000 Euronen einsteigen. Wie viele Spieler saßen am Tisch, als Erich noch mitspielte?

Ergebnis: 9

Lösungsweg: Sei n die Anzahl der Spieler zu Beginn und x das durchschnittliche Guthaben eines Spielers, als Erich noch mitspielte. Dann erhält man aus den Angaben folgende Gleichungen:

$$\frac{nx - 16\,000}{n-1} = x - 1\,000 \qquad \text{und} \qquad \frac{nx - 16\,000 + 2 \cdot 2\,000}{n+1} = x - 2 \cdot 1\,000$$

Umformen und Auflösen der beiden Gleichungen nach x ergibt

$$x = 17\,000 - 1\,000n \qquad \text{und} \qquad 2\,000n - 10\,000 = x,$$

woraus man durch Gleichsetzen sofort $n = 9$ erhält. Somit waren es neun Personen, die um den Tisch saßen, als Erich noch mitspielte.

Aufgabe 28. In einem $7 \times 7 \times 7$–Würfel sind je zwei benachbarte Einheitswürfel durch ein Begrenzungsquadrat voneinander getrennt. Es sollen nun Begrenzungsquadrate so entfernt werden, dass jeder Einheitswürfel mit mindestens einem der äußersten Einheitswürfel verbunden ist. Wie groß ist die minimale Anzahl der Begrenzungsquadrate, die entfernt werden müssen?

Ergebnis: 125

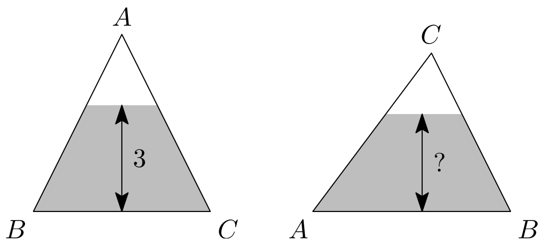
Lösungsweg: Der ganze Würfel besteht aus insgesamt 7^3 Einheitswürfeln. Entfernt man ein Begrenzungsquadrat, so werden zwei Einheitswürfel miteinander verbunden und die Anzahl der isolierten Räume im großen Würfel verringert sich um eins. Am Ende sollen höchstens $7^3 - 5^3$ isolierte Räume übrig bleiben, das ist nämlich die Anzahl der äußeren Einheitswürfel. Aus diesem Grund müssen mindestens $5^3 = 125$ Begrenzungsquadrate entfernt werden. Man sieht schnell, dass die Entfernung von 125 Begrenzungsquadraten auch ausreichend ist.

Aufgabe 29. Die Zahl 20∗∗∗16 ist eine 7-stellige Quadratzahl. Wie lautet der fehlende dreistellige Ziffernblock?

Ergebnis: 909

Lösungsweg: Es sei a eine ganze Zahl mit $a^2 = 20{*}{*}{*}16$. Das bedeutet, dass $a^2 - 16 = (a-4)(a+4)$ durch 100 teilbar ist. Da a gerade sein muss, folgt mit $a = 2b$, dass $(b-2)(b+2)$ durch 25 teilbar ist. Nun können aber nicht beide Zahlen $b-2$ und $b+2$ durch 5 teilbar sein, also teilt 25 entweder $b-2$ oder $b+2$. Deswegen ist b von der Form $b = 25n \pm 2$ für ein passendes n und es ergibt sich $a = 50n \pm 4$. Aufgrund der Abschätzungen $1\,404^2 < (1.414 \cdot 1\,000)^2 < (1\,000\sqrt{2})^2 = 2\,000\,000$ und $1\,454^2 > 1\,450^2 = 2\,102\,500 > 2\,100\,000$ erhält man $a = \pm 1\,446$. Dies liefert die Quadratzahl $a^2 = 2\,090\,916$ und somit den gesuchten Ziffernblock 909.

Aufgabe 30. Das Dreieck $\triangle ABC$ mit $\overline{AB} = \overline{AC} = 5\,\mathrm{m}$ und $\overline{BC} = 6\,\mathrm{m}$ ist zu einem Teil mit Wasser gefüllt. Liegt das Dreieck auf der Seite BC, so befindet sich die Wasseroberfläche $3\,\mathrm{m}$ über der Seite BC. Das Dreieck wird nun so gedreht, dass es auf der Seite AB zu liegen kommt. Wie viele Meter befindet sich in diesem Fall die Wasseroberfläche über der Seite AB?



Ergebnis: $\frac{18}{5}$

Lösungsweg: Es sei D der Mittelpunkt der Strecke BC. Dann ist das Dreieck $\triangle ABD$ rechtwinklig und aus dem Satz des Pythagoras folgt, dass $\overline{AD} = 4$ ist. Der Teil des Dreiecks, der nicht mit Wasser gefüllt ist, ist ein zum Dreieck $\triangle ABC$ ähnliches Dreieck mit einem Seitenverhältnis von $1:4$. Da das Verhältnis der Flächeninhalte des nicht gefüllten Teils und des gesamten Dreiecks auch nach der Drehung gleich bleibt, muss auch im zweiten Fall eine entsprechende Ähnlichkeit mit den gleichen Seitenverhältnissen gegeben sein. Daraus folgt, dass die Wasseroberfläche stets $3/4$ der Dreieckshöhe betragen muss. Man muss also lediglich die Höhe auf die Seite AB berechnen. Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ ist $\frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 12$ und aus $\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_{AB} = 12$ ergibt sich $h_{AB} = \frac{24}{5}$. Folglich beträgt die Höhe des mit Wasser gefüllten Teils $\frac{3}{4} \cdot \frac{24}{5} = \frac{18}{5}$.

Aufgabe 31. Gegeben sind sechs Schachteln, die von 1 bis 6 nummeriert sind, und 17 Pfirsiche, die auf unbekannte Weise auf diese Schachteln verteilt sind. Uns ist nur die folgende Vorgehensweise erlaubt: Sind genau n Pfirsiche in der n-ten Schachtel, essen wir einen davon und geben anschließend die verbleibenden $n-1$ Pfirsiche in die Schachteln 1 bis $n-1$, und zwar genau einen Pfirsich in jede der Schachteln. Wie müssen die Pfirsiche am Anfang auf die sechs Schachteln verteilt sein, sodass wir alle Pfirsiche essen können?

Ergebnis: (1, 1, 3, 2, 4, 6)

Lösungsweg: Am besten geht man das Problem umgekehrt an: Die Endverteilung $(0,0,0,0,0,0)$, bei der alle Pfirsiche gegessen wurden, kann nur ausgehend von der Verteilung $(1,0,0,0,0,0)$ erreicht werden. Diese kann wiederum nur aus $(0,2,0,0,0,0)$ hervorgehen, usw. Auf diesem Weg kann eine eindeutige Folge von Verteilungen der Pfirsiche erzeugt werden:

$$(0,0,0,0,0,0),\ (1,0,0,0,0,0),\ (0,2,0,0,0,0),\ (1,2,0,0,0,0),\ (0,1,3,0,0,0),\ (1,1,3,0,0,0),$$

$$(0,0,2,4,0,0),\ (1,0,2,4,0,0),\ (0,2,2,4,0,0),\ (1,2,2,4,0,0),\ (0,1,1,3,5,0),\ (1,1,1,3,5,0),$$

$$(0,0,0,2,4,6),\ (1,0,0,2,4,6),\ (0,2,0,2,4,6),\ (1,2,0,2,4,6),\ (0,1,3,2,4,6),\ (1,1,3,2,4,6).$$

Diese Folge endet mit der gesuchten Anfangsverteilung $(1,1,3,2,4,6)$.

Aufgabe 32. Ein Zweiersessellift transportiert Touristen berg- und talwärts. Es wollen 74 Personen mit dem Lift auf den Berg fahren und bei der Bergstation warten 26 Personen, die ins Tal fahren möchten. Exakt zu Mittag wird der Sessellift in Betrieb genommen. Zu diesem Zeitpunkt steigen zwei Personen bei der Bergstation und zwei bei der Talstation zu. Die restlichen Personen steigen anschließend jeweils zu zweit und ohne Unterbrechung zu. Um exakt 12:16 Uhr begegnet der erste besetzte nach oben fahrende Zweiersessel dem letzten besetzten talwärts fahrenden Zweiersessel. Um exakt 12:22 Uhr trifft der erste besetzte talwärts fahrende Zweiersessel auf den letzten besetzten nach oben fahrenden Zweiersessel. Die Entfernung zwischen je zwei aufeinander folgenden Sesseln ist stets gleich und die Geschwindigkeit des Sessellifts ist konstant. Wie lange dauert die Fahrt von der Talstation zur Bergstation in Minuten?

Ergebnis: 26

Lösungsweg: Die Entfernung zwischen dem ersten und dem letzten besetzten bergwärts fahrenden Zweiersessel ist dreimal so groß wie jene zwischen dem ersten und dem letzten besetzten talwärts fahrenden Zweiersessel. Demnach muss die Zeit zwischen den beiden in der Aufgabe gegebenen Zeitpunkten doppelt so lang sein wie die Zeit zwischen der Begegnung der beiden ersten besetzten Zweiersessel und der Begegnung des ersten besetzten nach oben fahrenden mit dem letzten besetzten talwärts fahrenden Zweiersessel. Daraus kann man folgern, dass sich die beiden ersten besetzten Zweiersessel um 12:13 Uhr exakt in der Mitte der gesamten Liftstrecke treffen. Eine Fahrt dauert also insgesamt 26 Minuten.

Aufgabe 33. Gegeben ist eine Raute (ein Rhombus) $ABCD$ mit $\angle BAD < \angle ADC$. Man wähle einen Punkt M auf der Strecke AB und einen Punkt N auf der Strecke BC, sodass $\triangle DMN$ ein gleichseitiges Dreieck ergibt und die Strecken AD und MD gleich lang sind. Die Punkte M und N müssen sich dabei von den Punkten A, B und C unterscheiden. Wie groß ist der Winkel $\angle CBA$ in Grad?

Ergebnis: 100°

Lösungsweg: Es gilt $\overline{CD} = \overline{AD} = \overline{MD} = \overline{ND}$. Daher sind die Dreiecke $\triangle AMD$ und $\triangle NCD$ gleichschenklig mit den Basen AM und NC. Es sei $\theta = \angle BAD$. Dann ist $\angle CBA = \angle ADC = 180^\circ - \theta$. Weil andererseits

$$\angle MAD = \angle DMA = \angle CND = \angle DCN = \theta$$

gilt, erhält man

$$\angle ADM = \angle NDC = 180^\circ - 2\theta$$

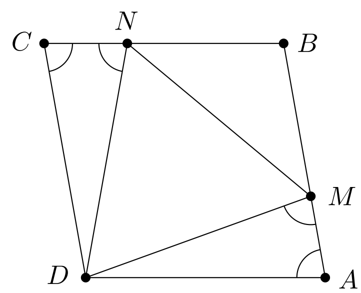
und

$$\angle ADC = \angle ADM + \angle MDN + \angle NDC = 420^\circ - 4\theta.$$

Daraus ergibt sich

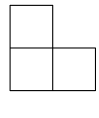
$$420^\circ - 4\theta = 180^\circ - \theta$$

oder $\theta = 80^\circ$. Es folgt $\angle CBA = 100^\circ$.



Aufgabe 34. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Zellen einer 2×7–Tabelle mit den Farben Rot und Blau einzufärben, sodass weder ein rotes noch ein blaues L-Trimino in der Tabelle aufscheint?

Hinweis: Jede einzelne Zelle wird vollständig mit einer der beiden Farben ausgefüllt. Ein L-Trimino hat die folgende Form und kann auch in gedrehter Weise vorkommen:



Ergebnis: 130

Lösungsweg: Die Tabelle habe zwei Zeilen und sieben Spalten. Wenn die erste Spalte der Tabelle einfärbig ist, muss die benachbarte Spalte die andere Farbe haben. Die dritte Spalte muss wiederum dieselbe Farbe wie die erste Spalte haben, usw. Da es zwei Möglichkeiten für die Farbwahl der ersten Spalte gibt, entstehen in diesem Fall zwei Möglichkeiten, die Tabelle einzufärben.

Wird die erste Spalte mit beiden Farben eingefärbt, so müssen auch alle anderen Spalten aus zwei Farben bestehen. Man sieht schnell, dass es keine Rolle spielt, wie die Farben auf die obere und die untere Zeile verteilt werden, da jede daraus resultierende Färbung den Voraussetzungen genügt. Es gibt also in diesem zweiten Fall $2^7 = 128$ verschiedene Färbungen.

Insgesamt erhält man folglich $2 + 128 = 130$ unterschiedliche Färbungen der Tabelle.

Aufgabe 35. Der leidenschaftliche Diamantensammler Manuel besitzt schon eine stattliche Anzahl an Diamanten, allerdings weniger als 200. Er teilt all seine Diamanten folgendermaßen auf mehrere einzelne Haufen, also mindestens zwei, auf:

- Je zwei dieser Haufen bestehen aus einer unterschiedlichen Anzahl von Diamanten.
- Keiner dieser Haufen besteht aus genau zwei Diamanten.
- Für jeden dieser Haufen gilt: Egal wie Manuel ihn in kleinere Haufen unterteilt, so hat mindestens einer der neuen Haufen dieselbe Anzahl an Diamanten, wie sie ein bereits zuvor existierender Haufen hat.

Bestimme unter diesen Voraussetzungen die maximale Gesamtzahl an Diamanten, die Manuel besitzen kann!

Hinweis: Jeder Haufen besteht aus einer von Null verschiedenen Anzahl an Diamanten.

Ergebnis: 196

Lösungsweg: Es sei m die Anzahl an Diamanten im kleinsten Haufen. Falls $m \geq 2$ gilt, so kann der kleinste Haufen in zwei Haufen der Größen 1 und $m - 1$ aufgeteilt werden, wobei keiner der beiden Haufen die Größe eines anderen Haufens haben kann. Daher muss $m = 1$ gelten.

Nun wird gezeigt, dass der zweitkleinste Haufen aus 3 Diamanten bestehen muss. Sei n die Anzahl der Diamanten in diesem Haufen. Da $n = 2$ ausgeschlossen ist, muss noch der Fall $n \geq 4$ untersucht werden. Die Aufteilung $n = 2+(n-2)$ zeigt jedoch, dass $n \geq 4$ nicht möglich ist.

Schritt für Schritt lässt sich nun zeigen: Falls die Haufen mit den Anzahlen $1, 3, \ldots, 2k-1$ ($k > 1$) die k kleinsten Haufen in der Verteilung sind, dann muss der $(k+1)$-te kleinste Haufen, falls er existiert, aus $2k+1$ Diamanten bestehen. Es sei dazu p die Anzahl der Diamanten im $(k+1)$-ten kleinsten Haufen. Offensichtlich ist p ungerade, da ein Haufen mit gerader Anzahl an Diamanten in zwei kleinere Haufen mit jeweils gerader Anzahl geteilt werden könnte. Ist $p \geq 2k+3$, so liefert die Aufteilung $p = 2 + (p-2)$ einen Widerspruch. Daraus kann man schließen, dass $p = 2k+1$ die einzige mögliche Anzahl ist, die die Bedingungen aus der Aufgabenstellung erfüllt.

Die Anzahl der Diamanten in Manuels Haufen ist also durch $1 + 3 + \cdots + (2k-1) = k^2$ gegeben. Da $14^2 = 196$ die größte Quadratzahl kleiner als 200 ist, handelt es sich dabei auch um die größtmögliche Anzahl an Diamanten, die Manuel unter den gegebenen Voraussetzungen besitzen kann.

Aufgabe 36. Im Spiel *Schere-Stein-Papier* gibt es die drei Zustände Schere (S), Stein (St), Papier (P) und es gilt $S > P$, $P > St$, $St > S$ sowie $S = S$, $St = St$, $P = P$. Wird ein Zustand A gegen einen Zustand B gespielt, so steht die Schreibweise $A > B$ abkürzend für 'A schlägt B' und $A = B$ für 'Das Spiel endet unentschieden'. Ein Turnier *Schere-Stein-Papier mit zwei Händen ohne Wiederholung* zwischen zwei Spielern S_1 und S_2 besteht aus 9 Spielen. In jedem Spiel wählt jeder Spieler ein Paar (ℓ_i, r_i), wobei ℓ_i und r_i für den gespielten Zustand der linken und der rechten Hand des Spielers S_i steht, und es spielt ℓ_1 gegen ℓ_2 sowie r_1 gegen r_2. Während des gesamten Wettbewerbs muss jeder Spieler jedes mögliche Paar genau einmal wählen. In einem einzelnen Spiel werden 4 Punkte vergeben: Jeweils 2 Punkte für den Gewinner der linken und 2 Punkte für den Gewinner der rechten Hand, 0 Punkte für den Verlierer und falls unentschieden, 1 Punkt für jeden Spieler pro Hand. Beide Spieler wählen die Reihenfolge ihrer Paare rein zufällig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jedes der 9 Spiele aus dem Turnier unentschieden, d. h. mit dem Spielstand 2:2, endet?

Ergebnis: $3!^3/9! = 1/1680$

Lösungsweg: Es werden drei Mengen mit jeweils drei Paaren definiert:

$$M_S = \{(S,S),(St,P),(P,St)\}, \quad M_{St} = \{(St,St),(P,S),(S,P)\}, \quad M_P = \{(P,P),(S,St),(St,S)\}$$

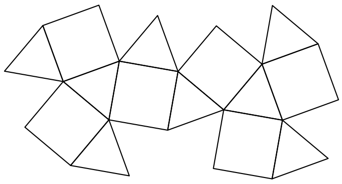
Beachte, dass ein einzelnes Spiel im Turnier genau dann unentschieden endet, wenn zwei Paare aus derselben Menge M_S, M_{St} oder M_P gegeneinander gespielt werden.

Eine Permutation der Elemente von $M_S \cup M_{St} \cup M_P$ entspricht eineindeutig einer Reihenfolge der Verwendung aller möglichen Paare im Turnier. Paare von solchen Permutationen entsprechen dann allen möglichen Ausgängen des gesamten Turniers. Alle Spiele enden genau dann in einem Unentschieden, wenn die Elemente aus der Menge M_S

bzw. M_{St} bzw. M_P in der Permutation von S_1 die gleichen drei Positionen einnehmen wie in der Permutation von S_2 irgendwelche Elemente aus der Menge M_S bzw. M_{St} bzw. M_P. Betrachtet man nun irgendeine Permutation, die die Reihenfolge der Züge von Spieler S_1 darstellt, dann gibt es genau $3!^3$ Anordnungen der Züge von Spieler S_2, die in jedem Spiel zu einem Gleichstand führen. Somit beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{3!^3}{9!} = \frac{1}{1680}.$$

Aufgabe 37. Das Netz eines Körpers besteht aus acht regelmäßigen Dreiecken und sechs Quadraten, wie in der Abbildung zu sehen ist:



Angenommen die Länge jeder Kante beträgt 1 km. Wie groß ist dann das Volumen des Körpers in km^3?

Ergebnis: $\frac{5}{3}\sqrt{2}$

Lösungsweg: Der beschriebene Körper kann wie folgt aus einem Würfel entstehen: Jede Ecke des Würfels wird so weggeschnitten, dass der Schnitt durch die Mittelpunkte der benachbarten Kanten verläuft. Der Würfel besitzt also die Kantenlänge $\sqrt{2}$ und somit das Volumen $2\sqrt{2}$. Die weggeschnittenen Körper haben die Form von (schiefen) Pyramiden mit einem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck als Grundfläche. Die Kathetenlänge dieses Dreiecks beträgt $\sqrt{2}/2$ und auch die Höhe beträgt $\sqrt{2}/2$. Das Volumen einer weggeschnittenen Pyramide beträgt daher $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2}/2)^2 \cdot (\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}/24$. Damit ist das Volumen des gegebenen Körpers

$$2\sqrt{2} - 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{24} = \frac{5}{3}\sqrt{2}.$$

Aufgabe 38. Finde den einzigen dreistelligen Primfaktor von 999 999 995 904.

Ergebnis: 601

Lösungsweg: Es ist

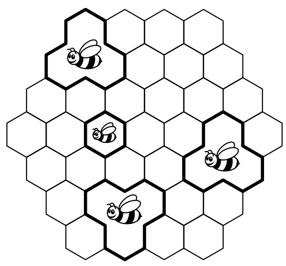
$$999\,999\,995\,904 = 10^{12} - 2^{12} = 2^{12}(5^{12} - 1)$$

und durch eine schrittweise Zerlegung in Faktoren erhält man daraus

$$5^{12} - 1 = (5-1)(5+1)(5^2+1)(5^2-5+1)(5^2+5+1)(5^4-5^2+1).$$

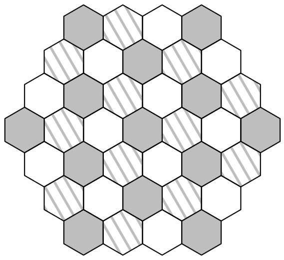
Nur der letzte der Faktoren ist größer als 100. Da man weiß, dass ein dreistelliger Primfaktor existiert und $5^4-5^2+1 = 601$ offensichtlich nicht durch 2, 3, 5 teilbar ist, ist 601 prim und somit die gesuchte Zahl.

Aufgabe 39. *Dreizehn Bienen.* Eine kleine Biene und zwölf große Bienen leben in einer 37-zelligen Bienenwabe, wie in der Abbildung zu sehen ist. Jede große Biene besetzt darin drei Zellen, die paarweise benachbart sind, und die kleine Biene genau eine Zelle. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Bienenwabe in dreizehn nicht-überlappende Gebiete aufzuteilen, sodass alle dreizehn Bienen wie oben beschrieben untergebracht werden können?



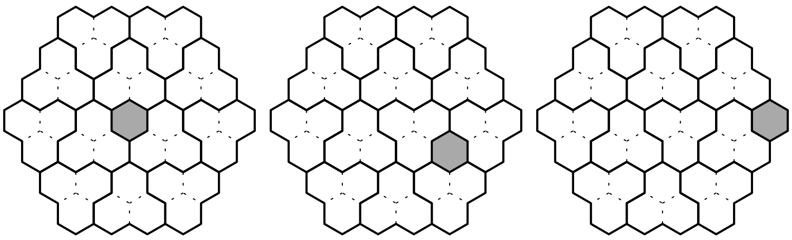
Ergebnis: 20

Lösungsweg: Man färbt die Wabe wie folgt mit drei Farben:



In dieser Färbung sind die drei Zellen einer großen Biene immer mit drei verschiedenen Farben gefärbt, egal wo sie liegen. Deshalb müssen die 12 weißen und die 12 schraffierten Felder den 12 großen Bienen gehören und in einem der 13 grauen Felder muss die kleine Biene leben.

Falls die kleine Biene die in der Mitte gelegene graue Zelle bewohnt, dann gibt es genau zwei Möglichkeiten, um die restliche Bienenwabe in 12 Gebiete für die großen Bienen zu teilen. Eine Möglichkeit davon ist unten links abgebildet und die andere entsteht daraus durch eine 60°-Drehung. Für jede der 6 grauen Zellen im Inneren der Bienenwabe mit Ausnahme der Zelle in der Mitte gibt es genau eine Möglichkeit, die großen Bienen in der restlichen Wabe unterzubringen. Für jede am Rand liegende graue Zelle gibt es genau zwei Möglichkeiten, die restliche Bienenwabe in dreizellige Gebiete zu teilen. Eine Möglichkeit ist unten rechts abgebildet und die andere ist symmetrisch dazu.

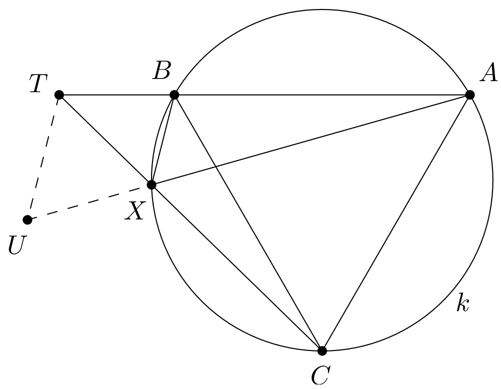


Man erhält somit $2 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 20$ Möglichkeiten die Honigwabe zu teilen, damit alle Bienen untergebracht werden können.

Aufgabe 40. Sei $\triangle ABC$ ein gleichseitiges Dreieck und k sein Umkreis. Der Punkt X liege auf dem kürzeren Kreisbogen über der Strecke BC von k und T sei der Schnittpunkt der Geraden AB und CX. Wie lange ist die Strecke BX, falls die Längen $\overline{AX} = 5$ und $\overline{TX} = 3$ gegeben sind?

Ergebnis: $\frac{15}{8}$

Lösungsweg: Wegen $\angle AXB = \angle ACB = 60°$ und $\angle CXA = \angle CBA = 60°$ gilt $\angle BXT = 180° - \angle AXB - \angle CXA = 60°$. Sei U der Punkt auf AX, sodass $TU \parallel BX$ erfüllt ist.



Dann ist $\triangle TUX$ ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 3 und es ergibt sich mit Hilfe des Strahlensatzes

$$\overline{BX} = \overline{TU} \cdot \frac{\overline{AX}}{\overline{AU}} = 3 \cdot \frac{5}{5+3} = \frac{15}{8}.$$

Aufgabe 41. Sei $\triangle ABC$ ein gleichseitiges Dreieck. Ein innerhalb des Dreiecks $\triangle ABC$ liegender Punkt P wird als *strahlend* bezeichnet, falls man genau 27 Strahlen finden kann, die von P ausgehen und die Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$ so schneiden, dass das Dreieck durch diese Strahlen in 27 flächeninhaltsgleiche kleinere Dreiecke geteilt wird. Bestimme die Anzahl der strahlenden Punkte in $\triangle ABC$.

Ergebnis: $\binom{26}{2} = 325$

Lösungsweg: Sei P ein strahlender Punkt im Inneren des gegebenen Dreiecks. Dann gehören die Halbgeraden $[PA$, $[PB$ und $[PC$ zu den 27 von P ausgehenden Strahlen, da andernfalls Vierecke entstehen, die nicht erlaubt sind. Eine Zerlegung der Dreiecksseiten durch die Strahlen eines strahlenden Punktes kann man also als eine Verteilung von 24 Kugeln auf drei Fächer sehen.

Sei umgekehrt eine Verteilung (p_1, p_2, p_3) von 24 Kugeln auf drei Fächer gegeben. Es gilt also $p_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 24\}$ für $i = 1, 2, 3$ und $p_1 + p_2 + p_3 = 24$. Teile nun die Seite s_i des gegebenen gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a jeweils durch p_i gleichmäßig verteilte Punkte in $p_i + 1$ Teile der Länge $\ell_i = a : (p_i + 1)$.

Der Flächeninhalt des gegebenen Dreiecks sei F. Für $i = 1, 2, 3$ besitzt jedes Dreieck mit Basis ℓ_i und Höhe $d_i := \frac{2}{27} \cdot \frac{F}{\ell_i}$ dann den Flächeninhalt $\frac{1}{27} \cdot F$. Nun ist die Frage, ob es einen inneren Punkt des Dreiecks gibt, der von jeder Seite s_i jeweils den Abstand d_i besitzt. Wegen

$$\frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2} + \frac{1}{\ell_3} = \frac{p_1 + 1}{a} + \frac{p_2 + 1}{a} + \frac{p_3 + 1}{a} = \frac{27}{a}$$

erhält man

$$d_1 + d_2 + d_3 = \frac{2}{27} \cdot F \cdot \frac{27}{a} = \frac{2}{a} \cdot F.$$

Somit ist die Summe $d_1 + d_2 + d_3$ genau die Höhe h im gleichseitigen Dreieck und es gibt tatsächlich einen eindeutig festgelegten Punkt P im Inneren des Dreiecks mit den Abständen d_i zur Seite s_i, genauer gilt $d_i = \frac{1}{27} \cdot h \cdot (p_i + 1)$. Dieser Punkt P ist nach Konstruktion ein strahlender Punkt.

Folglich entspricht jeder strahlende Punkt im gleichseitigen Dreieck eineindeutig einer Verteilung von 24 Kugeln auf drei Fächer. Die Anzahl solcher Verteilungen ist $\binom{26}{2} = 325$.

Aufgabe 42. Wie viele positive Teiler von 2016^2 sind kleiner als 2016, aber keine Teiler von 2016?

Ergebnis: 47

Lösungsweg: Aus der Primfaktorzerlegung $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ ergibt sich $2016^2 = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 7^2$. Deshalb hat 2016^2 genau $11 \cdot 5 \cdot 3 = 165$ Teiler, wovon wiederum genau $\frac{1}{2} \cdot (165 - 1) = 82$ kleiner als 2016 sind, denn mit Ausnahme von 2016 lassen sich die Teiler in Paare (x, y) mit $x \cdot y = 2016^2$ und $x < 2016 < y$ aufteilen. Nun hat die Zahl 2016 genau $6 \cdot 3 \cdot 2 - 1 = 35$ echte Teiler, die natürlich alle auch Teiler von 2016^2 sind. Folglich ist die gesuchte Anzahl $82 - 35 = 47$.

Aufgabe 43. Sei

$$z_n = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n - 1} + \sqrt{2n + 1}}.$$

Bestimme $z_1 + z_2 + \cdots + z_{2016}$.

Ergebnis: $\frac{1}{2}(4033\sqrt{4033} - 1)$

Lösungsweg: Für jede positive ganze Zahl $n \in \mathbb{N}$ folgt wegen $4n = (\sqrt{2n+1})^2 + (\sqrt{2n-1})^2$ durch Erweitern mit $(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})$

$$\begin{aligned}\frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n - 1} + \sqrt{2n + 1}} &= \frac{(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})((\sqrt{2n+1})^2 + (\sqrt{2n+1})(\sqrt{2n-1}) + (\sqrt{2n-1})^2)}{(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})} \\ &= \frac{1}{2}((\sqrt{2n+1})^3 - (\sqrt{2n-1})^3).\end{aligned}$$

Deshalb ist der Ausdruck $z_1 + z_2 + \cdots + z_{2016}$ eine teleskopische Summe und man erhält

$$\begin{aligned}z_1 + \cdots + z_{2016} &= \frac{1}{2}\big((\sqrt{3})^3 - (\sqrt{1})^3 + (\sqrt{5})^3 - (\sqrt{3})^3 + \cdots + (\sqrt{4033})^3 - (\sqrt{4031})^3\big) \\ &= \frac{1}{2}(4033\sqrt{4033} - 1).\end{aligned}$$

Aufgabe 44. Eine Folge $a_0, a_1, a_2 \ldots$ von ganzen Zahlen sei auf folgende Weise definiert: Wenn a_i durch 3 teilbar ist, ist $a_{i+1} = a_i/3$, andernfalls ist $a_{i+1} = a_i + 1$. Wie viele verschiedene positive ganze Zahlen a_0 gibt es, so dass die Folge den Wert 1 zum ersten Mal nach exakt 11 Schritten erreicht, das heißt $a_{11} = 1$ und $a_0, a_1, \ldots, a_{10} \neq 1$?

Ergebnis: 423

Lösungsweg: Die Zahl 1 kann nur von der 3 aus erreicht werden und diese von 2 oder 9. Die 9 kann von 8 oder 27 kommen, die 2 von 1 oder 6, aber für diese Aufgabenstellung kommt nur 6 als Vorgänger in Frage. Zur weiteren Rekonstruktion der Vorgänger sei P_n die Menge genau der positiven ganzen Zahlen, für die der Wert 1 in exakt n Schritten zum ersten Mal erreicht wird. Seien weiter p_n die Anzahl der Elemente von P_n sowie f_n, g_n und h_n die Anzahl der Elemente von P_n mit Rest 0, 1 und 2 bei Division durch 3. Da für $n \geq 3$ alle Elemente von P_n größer als 3 sind, folgt

- $f_{n+1} = p_n$, da genau für jedes $x \in P_n$ gilt, dass $3x \in P_{n+1}$ ist,
- $g_{n+1} = h_n$, da genau für jedes $x \in P_n$ der Form $3k + 2$ gilt, dass $x - 1 = 3k + 1 \in P_{n+1}$ ist, und
- $h_{n+1} = f_n$, da genau für jedes $x \in P_n$ der Form $3k + 3$ gilt, dass $x - 1 = 3k + 2 \in P_{n+1}$ ist.

Deswegen folgt

$$p_n = f_n + g_n + h_n = p_{n-1} + p_{n-2} + p_{n-3}$$

für $n \geq 4$. Die Startwerte sind, wie oben angegeben, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ und $p_3 = 3$. Die weiteren Terme können mit der Rekursionsformel berechnet werden und daraus ergibt sich $p_{11} = 423$.

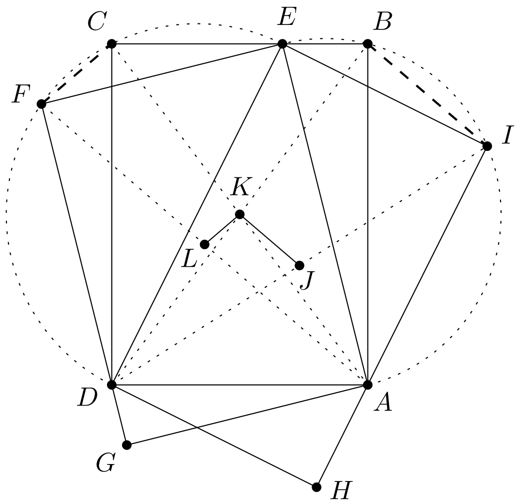
Aufgabe 45. Seien $ABCD$, $AEFG$ und $EDHI$ Rechtecke mit den zugehörigen Mittelpunkten K, L und J. Weiter seien A auf HI, D auf FG sowie E auf BC jeweils innere Punkte der Strecken und es gelte $\angle DEA = 53°$. Bestimme die Größe von $\angle LKJ$ (in Grad).

Ergebnis: 74°

Lösungsweg: Da KJ eine Mittellinie im Dreieck $\triangle IBD$ ist, gilt $KJ \parallel BI$. Analog folgt $KL \parallel CF$. Somit ist $\angle LKJ = \angle FCD + \angle ABI$. Wegen $\angle EIA = \angle EBA = 90°$ liegen die Punkte B und I auf dem Thaleskreis über der Strecke EA. Also ist $AIBE$ ein Sehnenviereck und es ergibt sich

$$\angle ABI = \angle AEI = 90° - \angle DEA = 37°.$$

Analog erhält man im Sehnenviereck $DECF$ den Winkel $\angle FCD = 37°$. Insgesamt folgt nun $\angle LKJ = 74°$.



Aufgabe 46. Alexander hat sich mehrfach aus der Menge $\{-1, 0, 1, 2\}$ Zahlen ausgesucht, so dass deren Summe gleich 19 und die Summe ihrer Quadrate gleich 99 ist. Was ist die größtmögliche Summe der dritten Potenzen von Alexanders Zahlen?

Ergebnis: 133

Lösungsweg: Zuerst sei bemerkt, dass die gewählten Nullen überhaupt keine Rolle spielen. Wenn Alexander genau a-mal die Zahl -1, b-mal die 1 und c-mal die 2 gewählt hat, dann lauten die gegebenen Bedingungen

$$-a + b + 2c = 19,$$
$$a + b + 4c = 99.$$

Also muss $-a + b + 8c = 19 + 6c$ maximiert werden. Die Addition der zwei Gleichungen liefert $6c = 118 - 2b$, folglich muss $c \leq 19$ gelten. Der Wert $c = 19$ lässt sich tatsächlich mit $a = 21$ und $b = 2$ erreichen. Das Maximum ergibt sich somit zu $19 + 6 \cdot 19 = 133$.

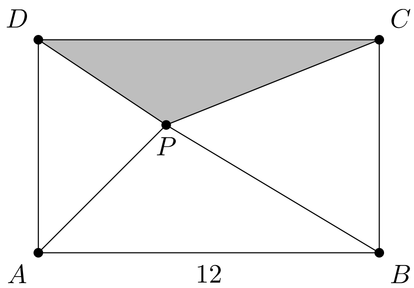
Aufgabe 47. Finde die größte 9-stellige Zahl mit den folgenden Eigenschaften:

- Alle Ziffern sind verschieden.
- Für jedes $k = 1, 2, \ldots, 9$ gilt: Wenn die k-te Stelle von links gestrichen wird, ist die resultierende 8-stellige Zahl durch k teilbar.

Ergebnis: 876 513 240

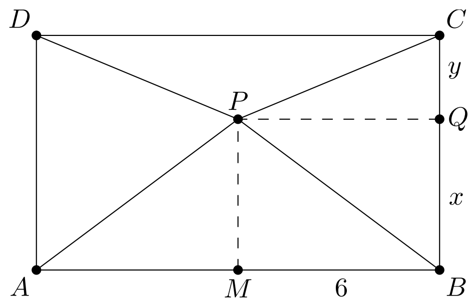
Lösungsweg: Sei A_k die k-te Stelle der gesuchten Zahl, also die Zahl gleich $\overline{A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9}$. Da es zehn Ziffern gibt, wird genau eine nicht verwendet. Diese sei d. Sei N_k die Zahl mit der gestrichenen k-ten Stelle. Weil N_2 gerade ist, muss A_9 gerade sein. Die Zahl N_5 ist ein Vielfaches von 5, also auch A_9. Deswegen ist $A_9 = 0$. Die Zahl N_9 ist Vielfaches von 9. Also muss auch ihre Quersumme, nämlich $1+2+3+4+5+6+7+8+9-d-A_9 = 45-d$ Vielfaches von 9 sein, was nur noch für $d = 9$ erfüllt ist. Die Zahlen N_8 und N_4 sind beide durch 4 teilbar, somit müssen A_7 und A_8 gerade sein. Da N_8 durch 8 teilbar ist, muss die zweistellige Zahl $\overline{A_6A_7}$ durch 4 teilbar sein. Die Zahlen N_3 und N_6 sind durch 3 teilbar, also auch ihre Quersummen. Daraus folgt $\{A_3, A_6\} = \{3, 6\}$. Da die größte Zahl gesucht ist, probiert man $A_1 = 8$, $A_3 = 6$ und $A_6 = 3$. Dann ist $\{A_7, A_8\} = \{2, 4\}$, und wegen $4 \mid \overline{A_6A_7}$ folgt $A_7 = 2$ sowie $A_8 = 4$. Füllt man die restlichen Ziffern in absteigender Ordnung in die Lücken, ergibt sich die Zahl 876 513 240. Diese Zahl erfüllt tatsächlich wegen $7 \mid 87\,651\,340$ die verbliebene Bedingung $7 \mid N_7$.

Aufgabe 48. Der Punkt P liegt im Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} = 12$. In jedem der Dreiecke $\triangle ABP$, $\triangle BCP$ und $\triangle DAP$ gilt, dass die Maßzahl des Umfangs gleich der Maßzahl der Fläche ist. Wie groß ist der Umfang des Dreiecks $\triangle CDP$?



Ergebnis: 25

Lösungsweg: In einem Dreieck ist die Maßzahl des Umfangs genau dann gleich der Maßzahl der Fläche, wenn der Inkreis den Radius 2 hat. Deswegen sind die Dreiecke $\triangle BCP$ und $\triangle DAP$ kongruent. Läge P näher an AD als an BC, dann wäre der Inkreisradius von $\triangle DAP$ kleiner als der Inkreisradius von $\triangle BCP$. Somit muss P auf der Mittelsenkrechten von AB liegen.



Seien Q die orthogonale Projektion von P auf BC, M der Mittelpunkt von AB sowie $x = \overline{BQ}$ und $y = \overline{CQ}$. Die Fläche des Dreiecks $\triangle ABP$ ist $6\,x$ und mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck $\triangle MBP$ folgt $\overline{BP} = \sqrt{x^2+6^2}$. Da im Dreieck $\triangle ABP$ die Maßzahlen von Fläche und Umfang gleich sind, ergibt sich

$$6x = 12 + 2\sqrt{x^2+6^2},$$

woraus $x = 9/2$ folgt.

Der Wert von y ergibt sich ähnlich. Man erhält $\overline{BP} = 15/2$, es ist $\overline{CP} = \sqrt{y^2+6^2}$ und die Ausgangsbedingung im Dreieck $\triangle BCP$ liefert

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \left(y + \frac{9}{2}\right) = y + \frac{9}{2} + \frac{15}{2} + \sqrt{y^2+6^2}$$

mit der einzigen positiven Lösung $y = 5/2$, womit man $\overline{CP} = 13/2$ erhält. Der gesuchte Umfang des Dreiecks $\triangle CDP$ ist folglich 25.

Aufgabe 49. Das Paar $(0,0)$ wird an eine Tafel geschrieben. Anschließend wird in jedem Schritt das an der Tafel stehende Paar (a,b) durch das Paar $(a+b+c, b+c)$ ersetzt, wobei die Zahl c in jedem Schritt aus der Menge $\{-118, 247\}$ beliebig gewählt werden darf. Finde die kleinste positive Anzahl von Schritten, nach der das Paar $(0,b)$ an der Tafel erscheinen kann, wobei b irgendeine beliebige Zahl sein darf.

Ergebnis: 145

Lösungsweg: Sei c_i die Zahl c, die im i-ten Schritt gewählt wird. Nach n Schritten ist die erste Koordinate des Paares von der Form $a = nc_1 + (n-1)c_2 + \cdots + c_n$. Für ein festes n sei nun s die Summe aller $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, für die $c_i = 247$ gewählt wurde, und t die Summe aller $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ mit $c_i = -118$. Es gilt dann $a = 247s - 118t$ und die Bedingung $a = 0$ ist äquivalent mit der Gleichheit $247s = 118t$. Da 247 und 118 außerdem teilerfremd sind, gibt es eine positive ganze Zahl k mit $s = 118k$ und $t = 247k$ und man erhält

$$365k = s + t = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Wegen $365 = 5 \cdot 73$ ist die Zahl 73 ein Teiler von $\frac{1}{2}n(n+1)$. Für ungerade n folgt $73 \mid \frac{1}{2}(n+1)$ oder $73 \mid n$, für gerade n muss $73 \mid \frac{n}{2}$ oder $73 \mid (n+1)$ gelten. Da das kleinstmögliche n gesucht ist, probiert man zunächst die Fälle der Gleichheit aus. Allerdings scheiden $73 = n$, $73 = \frac{n}{2}$ und $73 = n + 1$ aus, beispielsweise wegen der Nichterfüllung der Teilbarkeit von $\frac{1}{2}n(n+1)$ durch 5. Also probiert man die Möglichkeit $n = 2 \cdot 73 - 1 = 145$. Alle weiteren für n in Betracht kommenden Zahlen sind größer als 145.

Soll $n = 145$ die gesuchte Zahl sein, so müssen noch Zahlen c_i gefunden werden, so dass $247s = 118t$ erfüllt ist. Dazu sucht man die kleinste positive Zahl m mit

$$1 + 2 + \cdots + m \geq \frac{247}{365} \cdot (1 + 2 + \cdots + 145)$$

und findet $m = 120$. Genauer gilt

$$1 + 2 + \cdots + 120 = \frac{247}{365} \cdot (1 + 2 + \cdots + 145) + 97$$

bzw.

$$(247 + 118)(1 + 2 + \cdots + 120) = 247 \cdot (1 + 2 + \cdots + 145) + (247 + 118) \cdot 97$$

und schließlich

$$118 \cdot (1 + 2 + \cdots + 120) - 118 \cdot 97 = 247 \cdot (121 + 122 + \cdots + 145) + 247 \cdot 97.$$

Wählt man nun $c_i = -118$ für $i \in \{1,\ldots,120\} \setminus \{97\}$ und $c_i = 247$ für $i \in \{97\} \cup \{121, 122, \ldots, 145\}$, so hat man bei $n = 145$ tatsächlich die Gleichheit $247s = 118t$ erreicht. Damit ist $n = 145$ die gesuchte Zahl.

Aufgabe 50. Ein *ZickZack* besteht aus zwei parallelen Strahlen in entgegengesetzter Richtung mit einer geraden Verbindungslinie zwischen den Startpunkten der Strahlen. In wie viele Regionen kann die Ebene mit zehn ZickZacks maximal zerlegt werden?

Ergebnis: 416

Lösungsweg: Jeweils zwei ZickZacks können sich in maximal neun Punkten schneiden. Für jede Anzahl von ZickZacks lässt sich eine Konfiguration finden, so dass paarweise jeweils genau neun Schnittpunkte existieren und sich in jedem Schnittpunkt genau zwei Linien treffen. Man setzt einen ZickZack nach dem anderen und untersucht, wie viele neue Regionen der Ebene entstehen. Der n-te ZickZack wird durch die $9(n-1)$ Schnittpunkte in $9(n-1)+1$ Segmente zerteilt, jedes davon zerteilt eine Region in zwei Teilregionen. Daraus ergibt sich die Maximalzahl Z_n von Regionen nach n ZickZacks rekursiv durch $Z_n = Z_{n-1} + 9n - 8$ mit Startwert $Z_1 = 2$. Die geschlossene Form $Z_n = \frac{9}{2}n^2 - \frac{7}{2}n + 1$ beweist man mit Induktion und es ist $Z_{10} = 416$.

Aufgabe 51. Jede Seite eines Tetraeders ist ein Dreieck mit den Seitenlängen 1, $\sqrt{2}$ und c. Der Umkreisradius des Tetraeders ist $\frac{5}{6}$. Wie groß ist c?

Ergebnis: $\sqrt{23}/3$

Lösungsweg: Es wird die folgende Verallgemeinerung gezeigt: Falls jede Seitenfläche eines Tetraeders ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c ist, dann gilt mit dem Umkreisradius ϱ des Tetraeders die Beziehung $a^2 + b^2 + c^2 = 8\varrho^2$. Die Lösung der Aufgabe erfolgt durch einfaches Einsetzen.

Der Tetraeder wird dazu in einen Quader einbeschrieben, so dass die Kanten des Tetraeders die Flächendiagonalen des Quaders mit den Seitenlängen p, q und r sind. Mit dem Satz des Pythagoras folgt

$$p^2 + q^2 = a^2, \quad p^2 + r^2 = b^2 \quad \text{und} \quad q^2 + r^2 = c^2.$$

Zusätzlich stimmt der Umkreis des Tetraeders mit dem Umkreis des Quaders überein. Der Durchmesser des Umkreises ist damit gleich der Raumdiagonale des Quaders, also

$$(2\varrho)^2 = p^2 + q^2 + r^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2),$$

woraus obige Behauptung folgt.

Aufgabe 52. Für eine Cocktailparty hat der Butler James 2016 Cocktailgläser mit einem vorzüglichen Kirschcocktail in einer Reihe aufgestellt. Nun deckt er eines dieser Gläser mit einem silbernen Deckel zu und stellt darauf eine Statue. In jedes andere Glas legt er anschließend maximal eine Kirsche. Wie viele derartige Anordnungen von Deckel und Kirschen gibt es, wenn eine ungerade Anzahl an Kirschen verteilt wird und auf der rechten Seite des zugedeckten Glases mehr Kirschen liegen als auf der linken?

Ergebnis: $2016 \cdot 2^{2013}$

Lösungsweg: Zunächst werden alle möglichen Anordnungen des Deckels mit höchstens einer Kirsche in jedem der unbedeckten Gläser betrachtet. Es gibt 2016 Möglichkeiten, den Deckel auf ein Glas zu legen und 2^{2015} Möglichkeiten maximal eine Kirsche in jedes der restlichen Gläser zu legen, also insgesamt $2016 \cdot 2^{2015}$ Anordnungen. Nun gilt aber

$$0 = (-1+1)^{2016} = \sum_{i=0}^{2016} \binom{2016}{i} (-1)^i = \sum_{i=0}^{1008} \binom{2016}{2i} - \sum_{i=1}^{1008} \binom{2016}{2i-1},$$

weshalb die Anzahlen der geraden und der ungeraden Kirschenanordnungen gleich sind. Die Menge M aller Anordnungen mit ungerader Kirschenanzahl enthält damit insgesamt $\frac{1}{2} \cdot 2016 \cdot 2^{2015} = 2016 \cdot 2^{2014}$ Elemente. Von dieser Menge M kann man nun eine Anordnung herausgreifen und ihr die eindeutig bestimmte Anordnung zuordnen, bei der linke und rechte Kirschenanordnung einschließlich Deckel lediglich miteinander vertauscht sind. Beide Anordnungen sind verschieden, da die Kirschenanzahl ungerade ist. Genau eine davon hat deshalb auf der rechten Seite mehr Kirschen. Also kann man die Menge M vollständig in solche paarweise disjunkten Zweiermengen zerlegen. Deshalb ist die gesuchte Anzahl genau die Hälfte der Anordnungen in M, also $2016 \cdot 2^{2013}$.

Aufgabe 53. Die Oberfläche eines Holzwürfels wurde grün angemalt. Insgesamt 33 Ebenen, von denen jede jeweils parallel zwischen zwei gegenüber liegenden Seitenflächen des Würfels liegt, zerschneiden den Würfel in kleine Quader. Bestimme die Gesamtzahl der Quader, in die der Würfel zerschnitten wurde, wenn die Anzahl der Quader mit mindestens einer grünen Seitenfläche genau so groß ist wie die Anzahl der Quader ohne grüne Farbe.

Ergebnis: 1260 und 1344

Lösungsweg: Es ist leicht einzusehen, dass in jeder der drei möglichen Richtungen jeweils mindestens vier Ebenen liegen müssen. Wenn nämlich in einer Richtung weniger als fünf Schichten von Quadern wären, dann wäre die Anzahl der Quader mit mindestens einer grünen Seitenfläche in jedem Fall größer als die Anzahl der Quader ohne grüne Farbe. Bezeichnet man die Anzahl der Ebenen mit $a+3$, $b+3$ und $c+3$, wobei a, b und c positive natürliche Zahlen sind, so folgt wegen $(a+3)+(b+3)+(c+3) = 33$ die Gleichung $a+b+c = 24$.

Die Bedingung der Aufgabenstellung kann als

$$(a+4)(b+4)(c+4) = 2(a+2)(b+2)(c+2)$$

in einer Gleichung geschrieben werden, woraus man nach einfachen Umformungen $abc = 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ erhält. Da $a+b+c$ gerade ist, ist entweder genau eine Zahl gerade oder es sind alle drei Zahlen a, b und c gerade.

Im ersten Fall muss eine der drei Zahlen a, b und c durch 16 teilbar sein, o.B.d.A. sei dies a. Wegen $a+b+c = 24 < 2\cdot 16$ folgt sofort $a = 16$. Deshalb ist $b+c = 8$ und $bc = 15$ und somit $\{b,c\} = \{3,5\}$. Damit ist die Gesamtzahl an Quadern $(a+4)(b+4)(c+4) = 20 \cdot 7 \cdot 9 = 1260$.

Im zweiten Fall erhält man o.B.d.A. $a = 4x$, $b = 2y$, $c = 2z$ mit $xyz = 15$ und $2x+y+z = 12$. Die einzige Möglichkeit, diese Gleichungen zu erüllen, ist $x = 3$ und $\{y,z\} = \{1,5\}$, womit man insgesamt $(a+4)(b+4)(c+4) = 16\cdot 6\cdot 14 = 1344$ Quader erhält. Man hat also zwei mögliche Lösungen, nämlich 1260 und 1344.

Aufgabe 54. Für eine positive ganze Zahl n sei $p(n)$ das Produkt der von Null verschiedenen Ziffern von n. Bestimme den größten Primteiler von $p(1) + \cdots + p(999)$.

Ergebnis: 103

Lösungsweg: Durch Ausmultiplizieren des Ausdrucks $A = (0+1+2+\cdots+9)(0+1+2+\cdots+9)(0+1+2+\cdots+9)$ kann man erkennen, dass A das Ergebnis wäre, wenn man auch die Ziffer Null in die Multiplikation einbeziehen würde. Setzt man nun $S = p(1) + \cdots + p(999)$, so ist $S = (1+1+2+\cdots+9)(1+1+2+\cdots+9)(1+1+2+\cdots+9) - 1$, wobei eine 1 wegen des Produkts $0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ wieder abgezogen werden muss. Deshalb folgt

$$S = 46^3 - 1 = (46-1)(46^2+46+1) = 9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 103 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 103$$

und der gesuchte größte Primteiler ist 103.

Aufgabe 55. Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine streng monoton steigende Folge positiver ganzer Zahlen, die für alle positiven ganzen Zahlen k die Bedingungen $9 \mid a_{3k-2}$, $14 \mid a_{3k-1}$ und $19 \mid a_{3k}$ erfüllt. Bestimme den kleinstmöglichen Wert für a_{2016}.

Ergebnis: 14 478

Lösungsweg: Man kann annehmen, dass für alle n das Folgenglied a_n die kleinste natürliche Zahl ist, die größer als a_{n-1} ist und die jeweilige Teilbarkeitsbedingung erfüllt. Bei gegebenem a_{3k} gibt es nur zwei Möglichkeiten für a_{3k+3}, nämlich $a_{3k+3} = a_{3k} + 19$ oder $a_{3k+3} = a_{3k} + 38$. Der letzte Fall tritt genau dann ein, wenn es natürliche Zahlen c und d mit $5 \leq d \leq c \leq 9$ gibt, so dass $9 \mid a_{3k} + c$ und $14 \mid a_{3k} + d$ gilt, da dies $a_{3k+1} = a_{3k} + c$ und $a_{3k+2} = a_{3k} + 14 + d \geq a_{3k} + 19$ zur Folge hat.

Es gibt genau $\binom{6}{2} = 15$ Paare (c, d), die die Bedingung $5 \leq d \leq c \leq 9$ erfüllen. Da die Zahlen 9, 14 und 19 paarweise teilerfremd sind, folgt aus dem Chinesischen Restsatz, dass es für jedes solche Paar (c, d) genau eine nicht-negative ganze Zahl $a_{3k} < 9 \cdot 14 \cdot 19$ gibt, so dass die Teilbarkeitsbedingungen $19 \mid a_{3k}$, $9 \mid a_{3k} + c$ und $14 \mid a_{3k} + d$ erfüllt sind. Also gibt es genau 15 Folgenglieder $a_{3k} < 9 \cdot 14 \cdot 19$ mit $a_{3k+3} = a_{3k} + 38$. Keine zwei von diesen können die Differenz 19 haben und die Zahl $9 \cdot 14 \cdot 19 - 19$ kann kein solches Folgenglied sein. Deshalb ist $a_{3\ell} = 9 \cdot 14 \cdot 19$ für ein bestimmtes ℓ. Da $a_{3k+3} = a_{3k} + 38$ genau 15 Mal auftritt, muss $\ell = 9 \cdot 14 - 15 = 111$ sein.

Für die auf a_{333} folgenden Glieder a_n sind die Reste modulo 9, 14 und 19 die gleichen wie für a_{n-333}. Also ergibt sich die periodische Beziehung $a_{n+333} = a_n + 9 \cdot 14 \cdot 19$. Wegen $2016 = 6 \cdot 333 + 18$ ist die Berechnung von a_{18} erforderlich. Man erhält $a_{18} = 114$ und hieraus

$$a_{2016} = a_{6\cdot 333+18} = 6 \cdot 9 \cdot 14 \cdot 19 + 114 = 14\,478.$$

Aufgabe 56. Sei P ein Punkt innerhalb des Dreiecks $\triangle ABC$. Die Punkte D, E und F liegen jeweils auf den Seiten BC, CA und AB und zwar so, dass sich die Strecken AD, BE und CF im Punkt P schneiden. Bestimme die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$, wenn die Streckenlängen $\overline{PA} = 6$, $\overline{PB} = 9$, $\overline{PD} = 6$, $\overline{PE} = 3$ und $\overline{CF} = 20$ gegeben sind.

Ergebnis: 108

Lösungsweg: Die Fläche eines Dreiecks $\triangle XYZ$ wird mit F_{XYZ} bezeichnet. Aus $\overline{AP} = \overline{DP}$ folgt $F_{ABP} = F_{BDP}$ und $F_{APC} = F_{DCP} = F_{APE} + F_{EPC}$. Wegen $3 \cdot \overline{EP} = \overline{BP}$ erhält man $3 \cdot F_{APE} = F_{ABP} = F_{BDP}$ und

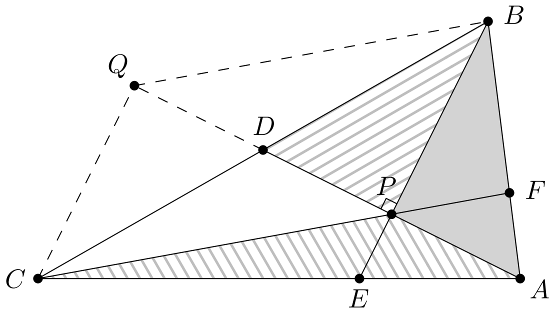
$$3 \cdot F_{CEP} = F_{BCP} = F_{BDP} + F_{DCP}.$$

Also ist

$$3 \cdot F_{DCP} = 3 \cdot (F_{APE} + F_{CEP}) = F_{BDP} + F_{BDP} + F_{DCP}$$

und somit $F_{BDP} = F_{DCP}$, woraus sich $\overline{BD} = \overline{CD}$ ergibt.

Setzt man $k = \overline{FP} : \overline{CP}$, so folgt aus $\overline{AP} = \overline{DP}$ und $\angle APF = \angle CPD$ das Flächenverhältnis $F_{AFP} = k \cdot F_{DCP}$. Analog erhält man $F_{FBP} = 3k \cdot F_{CEP}$. Aus den bekannten Verhältnissen ergibt sich $k = 1/3$ und hieraus $\overline{FP} = 5$ sowie $\overline{CP} = 15$. Ergänzt man das Dreieck $\triangle CPB$ zu einem Parallelogramm $CPBQ$, so kann man $\overline{BP}^2 + \overline{PQ}^2 = \overline{BQ}^2$ erkennen und erhält deshalb $\angle BPD = 90°$.



Also ist

$$F_{ABC} = 4 \cdot F_{BDP} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 = 108.$$

Alternative Lösung: Analog zu oben leitet man $\overline{BD} = \overline{CD}$ her. Aus $3 \cdot F_{CEP} = F_{BDP} + F_{DCP} = 3 \cdot F_{APE} + F_{APE} + F_{CEP}$ folgt $F_{CEP} = 2 \cdot F_{APE}$ und hieraus $\overline{CE} = 2 \cdot \overline{EA}$. Das gleiche Ergebnis kann man auch mit Hilfe des Satzes von Menelaos angewendet auf das Dreieck $\triangle ADC$ und die Gerade EB aus

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = -1$$

erhalten.

Wegen $\overline{BD} = \overline{CD}$ und $\overline{CE} = 2 \cdot \overline{EA}$ muss aufgrund des Satzes von Ceva $\overline{AF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{FB}$ sein. Also muss $EF \parallel CB$ sein und aus dem Strahlensatz mit Zentrum P folgt $\frac{\overline{FP}}{\overline{PC}} = \frac{1}{3}$ und somit $\overline{FP} = 5$ und $\overline{PC} = 15$. Setzt man nun $\overline{BD} = \overline{CD} = x$, so kann man mit der Flächenformel von Heron die Gleichungen

$$F_{DCP} = \sqrt{\left(\frac{21+x}{2}\right)\left(\frac{21-x}{2}\right)\left(\frac{9+x}{2}\right)\left(\frac{-9+x}{2}\right)}$$

und

$$F_{BDP} = \sqrt{\left(\frac{15+x}{2}\right)\left(\frac{15-x}{2}\right)\left(\frac{3+x}{2}\right)\left(\frac{-3+x}{2}\right)}$$

aufstellen und aufgrund der Flächengleichheit $F_{BDP} = F_{DCP}$ durch Gleichsetzen aus

$$(21^2 - x^2)(x^2 - 9^2) = (15^2 - x^2)(x^2 - 3^2)$$

die Beziehung $x^2 = 117$ herleiten. Hieraus ergibt sich durch Einsetzen $F_{DCP} = \frac{1}{4}\sqrt{(21^2 - 117)(117 - 9^2)} = 27$ und damit

$$F_{ABC} = 4 \cdot F_{DCP} = 4 \cdot 27 = 108.$$

Aufgabe 57. Bestimme die letzten zwei Ziffern vor dem Dezimalpunkt der Zahl $(7 + \sqrt{44})^{2016}$.

Ergebnis: 05

Lösungsweg: Wegen $0 < 7-\sqrt{44} < 1$ gilt auch $0 < (7-\sqrt{44})^{2016} < 1$. Man sieht sofort, dass $(7+\sqrt{44})^{2016}+(7-\sqrt{44})^{2016}$ eine ganze Zahl ist, da sich bei Anwendung der binomischen Formel auf beide Terme

$$\sum_{k=0}^{2016} \binom{2016}{k} 7^{2016-k} \left(\sqrt{44}\right)^k + \sum_{k=0}^{2016} \binom{2016}{k} 7^{2016-k} \left(-\sqrt{44}\right)^k = 2\sum_{k=0}^{1008} \binom{2016}{2k} 7^{2016-2k} \left(\sqrt{44}\right)^{2k}$$

ergibt und sich somit die ungeraden Potenzen von $\sqrt{44}$ gegenseitig aufheben. Also gilt

$$\lfloor (7+\sqrt{44})^{2016} \rfloor = (7+\sqrt{44})^{2016} + (7-\sqrt{44})^{2016} - 1.$$

Wegen $\left(\sqrt{44}\right)^{2k} = 44^k \equiv 144^k = 12^{2k} \bmod 100$ ergibt sich

$$2\sum_{k=0}^{1008} \binom{2016}{2k} 7^{2016-2k} \left(\sqrt{44}\right)^{2k} \equiv 2\sum_{k=0}^{1008} \binom{2016}{2k} 7^{2016-2k} 12^{2k} \bmod 100$$

und somit

$$(7+\sqrt{44})^{2016} + (7-\sqrt{44})^{2016} \equiv (7+12)^{2016} + (7-12)^{2016} \bmod 100.$$

Deshalb genügt es, die letzten zwei Ziffern von 19^{2016} und 5^{2016} zu bestimmen. Bei 5^{2016} erhält man 25 als die letzten beiden Ziffern und durch erneute Anwendung der binomischen Formel ergibt sich

$$(20-1)^{2016} \equiv \binom{2016}{2015} \cdot 20^1 \cdot (-1)^{2015} + \binom{2016}{2016} (-1)^{2016} \equiv -19 \pmod{100},$$

da alle restlichen Terme durch 20^2 teilbar sind. Also sind die gesuchten Ziffern $-19 + 25 - 1 = 05$.

Alternative Lösung: Analog zu oben sucht man die letzten beiden Ziffern des Ausdrucks $(7+\sqrt{44})^{2016} + (7-\sqrt{44})^{2016}$. Da die Zahlen $7+\sqrt{44}$ und $7-\sqrt{44}$ Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 14x + 5 = 0$ sind, erfüllen die Folgen $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ und $(\beta_n)_{n\geq 0}$, die durch $\alpha_n = (7+\sqrt{44})^n$ und $\beta_n = (7-\sqrt{44})^n$ definiert sind, die Rekursionsgleichungen $\alpha_{n+2} - 14\alpha_{n+1} + 5\alpha_n = 0$ und $\beta_{n+2} - 14\beta_{n+1} + 5\beta_n = 0$. Dies gilt dann auch für deren Summe $\gamma_n = (7+\sqrt{44})^n + (7-\sqrt{44})^n$. Ziel ist es nun, $\gamma_{2016} \bmod 100$ zu berechnen.

Setzt man $\tilde{\gamma}_n = \gamma_n \bmod 100$, so ist die Folge $(\tilde{\gamma}_n)_{n\geq 0}$ eindeutig durch die Rekursionsgleichung $\tilde{\gamma}_{n+2} = (14\tilde{\gamma}_{n+1} - 5\tilde{\gamma}_n) \bmod 100$ und die Anfangswerte $\tilde{\gamma}_0 = 2$, $\tilde{\gamma}_1 = 14$ bestimmt. Da $\tilde{\gamma}_n$ nur endlich viele Werte annehmen kann und jeder Term durch seine zwei Vorgängerterme eindeutig bestimmt ist, muss die Folge periodisch sein. Berechnet man die ersten Werte

$$2, 14, 86, 34, 46, 74, 6, 14, 66, 54, 26, 94, 86, 34, \ldots,$$

so erkennt man, dass beginnend mit $\tilde{\gamma}_2$ die Folge periodisch ist mit Periodenlänge 10. Deshalb ist $\tilde{\gamma}_{2016} = \tilde{\gamma}_6 = 6$ und die gesuchten Ziffern sind 05.