45. Österreichische Mathematik Olympiade

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene – Lösungen

1. April 2014

Aufgabe 1. *Man zeige: Es gibt keine positiven reellen Zahlen x, y, z mit*

$$\left(12x^2+yz\right)\cdot\left(12y^2+xz\right)\cdot\left(12z^2+xy\right)=2014x^2y^2z^2\ .$$

Lösung 1. Laut AM-GM Mittelungleichung gilt:

$$12x^2+yz=x^2+x^2+\cdots+x^2+yz\geq 13\sqrt[13]{x^{24}yz}$$

Wendet man dies analog auf die beiden anderen Klammerausdrücke an, so erhält man:

$$\begin{aligned}\left(12x^2+yz\right)\cdot\left(12y^2+xz\right)\cdot\left(12z^2+xy\right)&\geq 13^3\sqrt[13]{x^{24}yz\cdot y^{24}xz\cdot z^{24}xy}\\&=13^3\sqrt[13]{x^{26}y^{26}z^{26}}\\&=2197x^2y^2z^2>2014x^2y^2z^2\qquad\qquad(\text{da } x^2y^2z^2>0)\end{aligned}$$

Die linke Seite ist daher stets größer als die rechte. Es existieren also keine positiven reellen Zahlen x, y, z, die die Gleichung erfüllen.

(Gerd Baron) □

Lösung 2. Wir dividieren beide Seiten durch die positive Zahl $x^2y^2z^2$ und erhalten die folgende äquivalente Gleichung:

$$\left(12+\frac{yz}{x^2}\right)\cdot\left(12+\frac{xz}{y^2}\right)\cdot\left(12+\frac{xy}{z^2}\right)=2014$$

Nun substituieren wir mit $a=\frac{yz}{x^2}$, $b=\frac{xz}{y^2}$, $c=\frac{xy}{z^2}$, und daher $abc=1$.
Ausmultiplizieren ergibt:

$$\begin{aligned}(12+a)(12+b)(12+c)&=12^3+12^2(a+b+c)+12(ab+bc+ca)+abc\\&\geq 12^3+12^2\cdot 3\sqrt[3]{abc}+12\cdot 3\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}+abc&&(\text{AM-GM})\\&=12^3+12^2\cdot 3+12\cdot 3+1&&(\text{wegen } abc=1)\\&=(12+1)^3=2197>2014\end{aligned}$$

Die linke Seite ist daher stets größer als 2014. Es existieren also keine positiven reellen Zahlen x, y, z, die die Gleichung erfüllen.

(Gerd Baron) □

Lösung 3. Gemäß Hölder-Ungleichung gilt

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\geq\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}b_i}\right)^n\ ,$$

was angewandt auf unsere Ungleichung das Folgende ergibt:

$$\begin{aligned}\prod_{\text{cyc}}\left(12x^2+yz\right)&\geq\left(\sqrt[3]{12^3x^2y^2z^2}+\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\right)^3\\&=\left((12+1)\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\right)^3\\&=13^3x^2y^2z^2\\&=2197x^2y^2z^2>2014x^2y^2z^2\qquad\qquad(\text{da } x^2y^2z^2>0)\end{aligned}$$

Die linke Seite ist daher stets größer als die rechte. Es existieren also keine positiven reellen Zahlen x, y, z, die die Gleichung erfüllen.

(Karl Czakler) □

Lösung 4. Ausmultiplizieren ergibt:

$$12^3x^2y^2z^2 + \sum_{\text{cyc}}\left(12^2x^3y^3\right) + \sum_{\text{cyc}}\left(12x^4yz\right) + x^2y^2z^2 = 2014x^2y^2z^2 \qquad \Big| - 1729x^2y^2z^2 \tag{1}$$

$$\iff \quad \sum_{\text{cyc}}\left(12^2x^3y^3\right) + \sum_{\text{cyc}}\left(12x^4yz\right) = 285x^2y^2z^2 \tag{2}$$

Gemäß Ungleichung von Muirhead mit $(3,3,0) \succeq (2,2,2)$ gilt:

$$\sum_{\text{cyc}}\left(x^3y^3\right) \geq \sum_{\text{cyc}}\left(x^2y^2z^2\right)$$

Also können wir verschärfen und sehen:

$$\begin{aligned}
LS &= \sum_{\text{cyc}}\left(12^2x^3y^3\right) + \sum_{\text{cyc}}\left(12x^4yz\right) \\
&\geq \sum_{\text{cyc}}\left(12^2x^3y^3\right) && \Big(\text{da } \sum_{\text{cyc}}\left(12x^4yz\right) \geq 0\Big) \\
&= 12^2\sum_{\text{cyc}}\left(x^3y^3\right) && (\text{herausziehen von } 12^2) \\
&\geq 12^2\sum_{\text{cyc}}\left(x^2y^2z^2\right) && (\text{Muirhead}) \\
&= 12^2 \cdot 3 \cdot \left(x^2y^2z^2\right) \\
&= 432\left(x^2y^2z^2\right) > 285\left(x^2y^2z^2\right) && (\text{da } x^2y^2z^2 > 0)
\end{aligned}$$

Die linke Seite ist daher stets größer als die rechte. Es existieren also keine positiven reellen Zahlen x, y, z, die die Gleichung erfüllen.

(Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 5. Wegen der Homogenität, (d.h., für jedes reelle t gilt, (x,y,z) ist genau dann Lösung, wenn (tx,ty,tz) Lösung ist) können wir oBdA $xyz = 1$ annehmen. Wir können sogar wegen der Symmetrie, (d.h. mit (x,y,z) sind auch alle Permutationen davon Lösungen) zusätzlich $xy \geq 1 \geq z$ annehmen.

Setzen wir also $xyz = 1$ und multiplizieren aus, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\left(12x^2 + yz\right) \cdot \left(12y^2 + xz\right) \cdot \left(12z^2 + xy\right) = 2014x^2y^2z^2 \\
\iff \quad &\left(12x^2 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(12y^2 + \frac{1}{y}\right) \cdot \left(12\frac{1}{(xy)^2} + xy\right) - 2014 = 0 \\
\iff \quad &\frac{(12x^3+1)\cdot(12y^3+1)\cdot(12+(xy)^3)}{(xy)^3} - 2014 = 0
\end{aligned}$$

[Oder wir multiplizieren die ursprüngliche Gleichung mit $xyz = 1$ und erhalten

$$\left(12x^3+1\right) \cdot \left(12y^3+1\right) \cdot \left(12z^3+1\right) - 2014 = 0\ .$$

Multiplizieren wir noch einmal mit $(xy)^3$, so erhalten wir

$$\left(12x^3+1\right) \cdot \left(12y^3+1\right) \cdot \left(12+(xy)^3\right) - 2014(xy)^3 = 0\ .]$$

Setzen wir $u = xy \geq 1$ und multiplizieren wir die Gleichung mit u^3, so erhalten wir:

$$\left(12x^3+1\right)\cdot\left(12y^3+1\right)\cdot\left(12+u^3\right)-2014u^3=0$$

Für die linke Seite gilt nun aber

$$\begin{aligned}
&\left(12x^3+1\right)\cdot\left(12y^3+1\right)\cdot\left(12+u^3\right)-2014u^3\\
&=1728u^3+144\left(x^3+y^3\right)+12+144u^6+12\left(x^3+y^3\right)u^3+u^3-2014u^3\\
&=144u^6-285u^3+144\left(x^3+y^3\right)+12\left(x^3+y^3\right)u^3+12\\
&>144u^6-288u^3+144 \qquad \left(\text{wegen } x^3+y^3\geq 2\sqrt{x^3y^3}=2\sqrt{u^3}\geq 1\right)\\
&=144\left(u^3-1\right)^2\geq 0
\end{aligned}$$

Somit kann nie Gleichheit gelten. Es existieren keine reellen Lösungen.

(Gerd Baron) □

Punktevorschläge:

- Ausmultiplizieren der linken Seite: **0 Punkte**
- Ausmultiplizieren der linken Seite und zusammenfassen der Terme (siehe Gleichung (1) in Lösung 4): **1 Punkt**
- Für Beobachtung, dass linke Seite größer als rechte Seite ist anhand verschiedener Zahlenbeispiele, oder Vermutung, dass linke Seite stets größer als rechte Seite ist, maximal **1 Punkt**
- Nicht zielführende (aber zumindest korrekte) Anwendung der Mittelungleichung: **1 Punkt**

Aufgabe 2. *Man bestimme alle Quadrupel (a, b, c, d) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:*

$$\begin{aligned}
ab+ac&=3b+3c\\
bc+bd&=5c+5d\\
ac+cd&=7a+7d\\
ad+bd&=9a+9b
\end{aligned}$$

Lösung 1.

- *Fall I :* $a+b\neq 0$, $b+c\neq 0$, $c+d\neq 0$, $d+a\neq 0$. Daraus folgt $(a,b,c,d)=(3,5,7,9)$.
- *Fall II :* $a+b=b+c=c+d=d+a=0$. Daraus folgt $(a,b,c,d)=(t,-t,t,-t)$, t beliebig reell.
- *Fall III :* Weder alle gleich noch alle ungleich Null. OBdA(Gleichungssystem ist zyklisch) $b+c=0$ (Glg.1 erf.), $c+d\neq 0$. Dann aber $b=5$ (Glg.2 erf.) und somit $c=-5(\neq 7)$. Daher $d+a=0$ (Glg.3 erf.). Unterfall A) $a+b=0$ mit $a=-5$, $d=5$ und $c+d=0$ (Widerspruch).

  Also Unterfall B) $a+b\neq 0$ mit $d=9$, $a=-9$.

  Daher gilt $b+c=d+a=0$, $a+b\neq 0$, $c+d\neq 0$ und $(a,b,c,d)=(-9,5,-5,9)$.

  D.h., eine Summe gleich Null, die nächste ungleich Null, führt zu übernächste gleich Null und dann wieder ungleich Null.

  Daher letzter Fall durch zyklischen Übergang zu $c+d=a+b=0$, $b+c\neq 0$, $d+a\neq 0$, $(a,b,c,d)=(3,-3,7,-7)$.

(Gerd Baron) □

Lösung 2. Aus der ersten Gleichung folgt, dass $a = 3$ oder $b + c = 0$ gelten muss (oder beide). (Falls $b + c = 0$ gilt, ist die Gleichung erfüllt. Andernfalls kann man beide Seiten durch $b + c \neq 0$ dividieren und erhält $a = 3$.) Analoges gilt für die anderen Gleichungen, also gilt insgesamt:

$$\begin{array}{cccc} a = 3 & \text{oder} & b + c = 0 & \text{(oder beide)} \\ b = 5 & \text{oder} & c + d = 0 & \text{(oder beide)} \\ c = 7 & \text{oder} & a + d = 0 & \text{(oder beide)} \\ d = 9 & \text{oder} & a + b = 0 & \text{(oder beide)} \end{array}$$

Wir unterscheiden folgende Fälle nach der Anzahl der Bedingungen, für die die rechte Hälfte erfüllt ist:

- *Fall 1:* In allen vier Bedingungen ist die rechte Hälfte erfüllt, also $b+c = 0$, $c+d = 0$, $a+d = 0$, $a + b = 0$. Sei a beliebig, dann erhalten wir $b = -a$, $c = a$ und $d = -a$. Dies ist für jeden Wert von a eine Lösung, also erhalten wir unendlich viele Lösungstupel der Form $(t, -t, t, -t)$ für jede reelle Zahl t.
- *Fall 2:* In genau drei der vier Bedingungen ist die rechte Hälfte erfüllt. OBdA (da die vier Bedingungen zyklisch sind) seien dies die ersten drei Bedingungen. Also gilt $b = -c = d = -a$, womit auch bei der vierten Bedingung die rechte Hälfte erfüllt ist, und wir wieder im ersten Fall sind.
- *Fall 3:* In genau zwei der vier Bedingungen ist die rechte Hälfte erfüllt. Wir müssen nun unterscheiden, ob diese beiden Bedingungen (zyklisch) „benachbart" sind oder nicht.
  - *Fall 3a:* Bei genau zwei „benachbarten" Bedingungen ist die rechte Hälfte erfüllt. OBdA (da die vier Gleichungen zyklisch sind) sei dies bei der ersten und zweiten Bedingung, d.h. $b + c = 0$ und $c + d = 0$. Also $b = -c = d$.

    Da bei der dritten und vierten Bedingung die linke Hälfte erfüllt sein muss, gilt $c = 7$ und $d = 9$, was ein Widerspruch zu $-c = d$ ist. Also gibt es hier keine Lösungen.
  - *Fall 3b:* Bei zwei „gegenüberliegenden" Bedingungen ist die rechte Hälfte erfüllt.
    - *Fall 3b.1:* Bei der ersten und dritten Bedingung ist die rechte Hälfte erfüllt, also $b = -c$ und $a = -d$. Bei der zweiten und vierten muss die linke Hälfte erfüllt sein, also $b = 5 = -c$ und $d = 9 = -a$. Wir erhalten die Lösung $(-9, 5, -5, 9)$.
    - *Fall 3b.2:* Bei der zweiten und vierten Bedingung ist die rechte Hälfte erfüllt, also $c = -d$ und $a = -b$. Bei der ersten und dritten muss die linke Hälfte erfüllt sein, also $a = 3 = -b$ und $c = 7 = -d$. Wir erhalten die Lösung $(3, -3, 7, -7)$.
- *Fall 4:* In genau einer Bedingung ist die rechte Hälfte erfüllt. OBdA sei dies bei der ersten Bedingung, also $b = -c$. In der zweiten, dritten und vierten Bedingung muss die linke Hälfte erfüllt sein, also $b = 5$, $c = 7$ und $d = 9$. Dies ist ein Widerspruch zu $b = -c$, also gibt es hier keine Lösungen.
- *Fall 5:* In keiner Bedingung ist die rechte Hälfte erfüllt, also muss bei allen die linke Hälfte gelten. Somit erhalten wir die Lösung $(3, 5, 7, 9)$.

(Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 3. Gleich wie in der vorigen Lösung sehen wir, dass aus der ersten Gleichung folgt, dass entweder $a = 3$ oder $b + c = 0$ gelten muss. Wir betrachten diese beiden Fälle getrennt:

- *Fall $b + c \neq 0$:* Dann gilt also $a = 3$. Wegen der zweiten Gleichung muss entweder $b = 5$ oder $c + d = 0$ gelten. Wiederum betrachten wir diese Fälle getrennt:

    - *Fall* $c+d \neq 0$: Dann gilt $b = 5$. In der vierten Gleichung gilt dann $a+b = 8 \neq 0$, also muss $d = 9$ gelten. Dann gilt in der dritten Gleichung $a+d = 12 \neq 0$, also muss $c = 7$ gelten. Wir erhalten also das Lösungstupel $(3, 5, 7, 9)$.
    - *Fall* $c+d = 0$: Dann gilt $d = -c$. Wegen der dritten Gleichung muss entweder $c = 7$ oder $a+d = 0$ gelten. Ein weiteres Mal betrachten wir diese Fälle getrennt:
        * *Fall* $a+d \neq 0$: Dann gilt also $c = 7 = -d$. Somit ist $d \neq 9$, also muss zur Erfüllung der vierten Gleichung $a+b = 0$ gelten. Wir erhalten somit das Lösungstupel $(3, -3, 7, -7)$.
        * *Fall* $a+d = 0$: Dann gilt $d = -a = -c = -3$. Wegen $d \neq 9$ muss wiederum zur Erfüllung der vierten Gleichung $a+b = 0$ gelten, also $b = -a = -3$. Dies ist ein Widerspruch zu $b+c \neq 0$.

- *Fall* $b+c = 0$: Dann gilt also $c = -b$. Wegen der zweiten Gleichung muss entweder $b = 5$ oder $c+d = 0$ gelten. Wiederum betrachten wir diese Fälle getrennt:
    - *Fall* $c+d \neq 0$: Dann gilt $b = 5 = -c$. Wegen $c \neq 7$ folgt aus der dritten Gleichung, dass $a+d = 0$ gelten muss. Wegen der vierten Gleichung muss weiters entweder $d = 9$ oder $a+b = 0$ gelten. Ein weiteres Mal betrachten wir diese Fälle getrennt:
        * *Fall* $a+b \neq 0$: Dann gilt $d = 9 = -a$, und wir erhalten das Lösungstupel $(-9, 5, -5, 9)$.
        * *Fall* $a+b = 0$: Dann gilt $a = -b = c = -d$, ein Widerspruch zu $c+d \neq 0$.
    - *Fall* $c+d = 0$: Also $d = -c = b$. Wegen der dritten Gleichung muss entweder $c = 7$ oder $a+d = 0$ gelten. Ein letztes Mal betrachten wir diese Fälle getrennt:
        * *Fall* $a+d \neq 0$: Dann gilt also $c = 7 = -d = -b$. Wegen $d \neq 9$ gilt weiters $a+b = 0$, also $a = -b = -d$, ein Widerspruch zu $a+d \neq 0$.
        * *Fall* $a+d = 0$: Dann gilt $d = -a = b = -c$. Wir sehen, dass dies für jeden Wert von a eine Lösung ist, also erhalten wir unendlich viele Lösungstupel der Form $(t, -t, t, -t)$ für jede reelle Zahl t.

Für alle so gefundenen Lösungstupel lässt sich leicht überprüfen, dass sie das Gleichungssystem auch tatsächlich erfüllen.

(Birgit Vera Schmidt) □

Punktevorschläge:

- Triviale bzw. durch Probieren gefundene Lösungstupel: Maximal **2 Punkte** aus folgenden Möglichkeiten:
  (Das heißt, selbst wenn alle der folgenden Lösungstypen durch Probieren ohne Argumentation gefunden werden, gibt es dafür maximal 2 Punkte.)
    - $(0, 0, 0, 0)$: **0 Punkte**
    - $(3, 5, 7, 9)$: **1 Punkt**
    - $(t, -t, t, -t)$: **1 Punkt**
    - $(3, -3, 7, -7)$ oder $(-9, 5, -5, 9)$ (oder beide): **1 Punkt**
- Zerlegung in Faktoren $(a-3)(b+c)$ oder Fallunterscheidung „$a = 3$ oder $b+c = 0$“: **1 Punkt**
- Herleitung der Lösungstupeln und Beweis, dass es keine weiteren gibt: **5 Punkte**
- Fehlen von Lösungstupeln bei sonst vollständigen Lösungswegen: **-1 Punkt** pro Lösungstyp

Aufgabe 3. *Die Folge $\langle a_n \rangle$ ist durch die Rekursion*

$$a_{n+1} = 5a_n^6 + 3a_{n-1}^3 + a_{n-2}^2 \qquad \text{für } n \geq 2$$

und die Menge der Anfangswerte $\{a_0, a_1, a_2\} = \{2013, 2014, 2015\}$ festgelegt.
(Das heißt, die Anfangswerte sind diese drei Zahlen in beliebiger Reihenfolge.)

Man zeige: Die Folge enthält keine sechste Potenz einer natürlichen Zahl.

Lösung. Wir betrachten zweite, dritte und sechste Potenzen modulo 7:

x	x^2	x^3	x^6
0	0	0	0
1	1	1	1
2	4	1	1
3	2	6	1
4	2	1	1
5	4	6	1
6	1	6	1

Um zu zeigen, dass kein Folgenelement eine sechste Potenz sein kann, genügt es also zu zeigen, dass kein Folgenelement kongruent 0 oder 1 modulo 7 ist.

Wir beweisen dies durch vollständige Induktion.

Zu beweisen: $a_i \not\equiv 0 \mod 7$ und $a_i \not\equiv 1 \mod 7$ für alle i.

Induktionsstart: Modulo 7 gilt für die ersten drei Folgenelemente $2013 \equiv 4$, $2014 \equiv 5$ und $2013 \equiv 6$.

Induktionsschritt: Wir zeigen, dass für alle natürlichen Zahlen $i \geq 2$ aus der Induktionsannahme „keines der Folgenelemente a_i, a_{i-1} und a_{i-2} ist kongruent 0 oder 1 modulo 7“ die Induktionsbehauptung „dann ist auch a_{i+1} nicht kongruent zu 0 oder 1 modulo 7“ folgt.

Es gilt $a_{i+1} = 5a_i^6 + 3a_{i-1}^3 + a_{i-2}^2$. Wir wissen, dass $5a_i^6 \equiv 5 \mod 7$. Der zweite Ausdruck, $3a_{i-1}^3$, kann gemäß der Tabelle modulo 7 nur die Werte 3 oder 4 annehmen (da a_{i-1} nur die Werte von 2 bis 6 modulo 7 haben kann, und eine dritte Potenz davon daher nur die Werte 1 oder 6). Der letzte Ausdruck, a_{i-2}^2, kann mit gleicher Argumentation nur die Werte 1, 2 oder 4 annehmen. In Summe kann sich für a_{i+1} daher nur einer der Werte 2, 3, 4, 5 oder 6 ergeben, womit die Behauptung bewiesen ist.

(Gerd Baron, Birgit Vera Schmidt) □

Punktevorschläge:

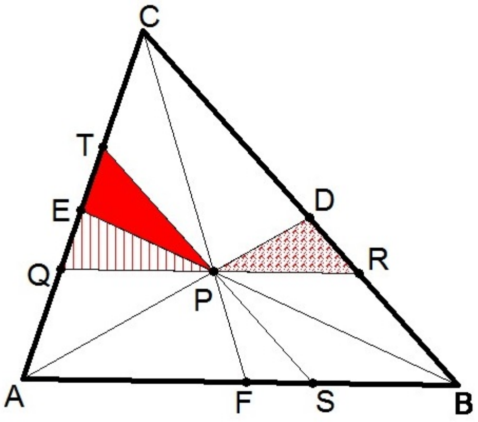
- Berechnung aller 6 möglichen Werte von a_3: **0 Punkte**
- Beweis, dass a_3 nie eine 6. Potenz ist: **1 Punkt**
- Versuch, einen Modul (> 2) anzuwenden: **1 Punkt**
  (Maximal 1 Punkt unabhängig von der Anzahl der ausprobierten Moduln)

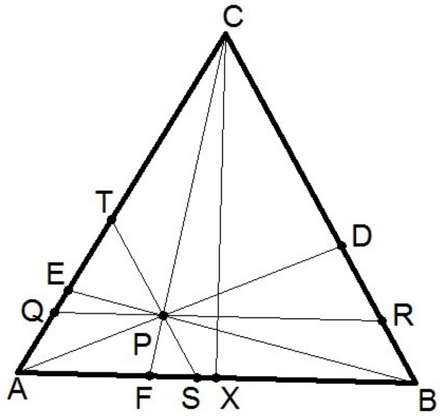
Aufgabe 4. *Für einen Punkt P im Inneren des Dreiecks ABC seien D, E und F die Schnittpunkte der Ecktransversalen mit den Gegenseiten, also D der Schnittpunkt der Verlängerung von AP mit BC, E der Schnittpunkt der Verlängerung von BP mit AC und F der Schnittpunkt der Verlängerung von CP mit AB.*

Weiters seien Q und R die Schnittpunkte der Parallelen zu AB durch P mit den Seiten AC bzw. BC (in dieser Reihenfolge). Analog seien S und T die Schnittpunkte der Parallelen zu BC durch P mit den Seiten AB bzw. AC (in dieser Reihenfolge).

In einem gegebenen Dreieck ABC bestimme man alle Punkte P, für die die Dreiecke PRD, PEQ und PTE denselben Flächeninhalt haben.

Lösung 1. Im Folgenden bezeichne $[XYZ]$ die Fläche des Dreiecks XYZ.





Da nur Flächenverhältnisse und Parallele auftreten, können wir oBdA annehmen, dass das Dreieck ABC ein gleichseitiges Dreieck ist. Sei CX die Schwerlinie (Streckensymmetrale) durch den Eckpunkt C und liege P (oBdA) links davon, also im Dreieck AXC. Dann gilt:

$$\overline{QP} < \overline{PR} \qquad \text{und} \qquad \overline{QE} < \overline{DR}, \qquad \text{da} \qquad \sphericalangle APQ = \sphericalangle DPR > \sphericalangle BPR = \sphericalangle EPQ$$

Mit der Gleichheit der Winkel $\sphericalangle EQP = \sphericalangle DRP$ folgt daraus

$$[PEQ] < [PRD] \ .$$

Aus der Gleicheit dieser beiden Dreiecke folgt also, dass P auf der Schwerlinie durch C liegt.

Aus der zweiten Gleichheit $[PQE] = [PET]$ folgt $\overline{QE} = \overline{ET}$. Da die Dreiecke PQT und BAC ähnlich sind (entsprechende Seiten sind zueinander parallel), ist auch das Dreieck PQT gleichseitig und PE senkrecht auf QT. Somit ist aber auch BE auf AC senkrecht und daher Schwerlinie im Dreieck ABC. Es folgt also, dass es genau eine Lösung gibt und P der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist.

(Gerd Baron) □

Lösung 2. Aus der zweiten Gleichheit $[PQE] = [PET]$ folgt $\overline{QE} = \overline{ET}$ und daher ist PE eine Schwerlinie im Dreieck PQT. Da die Dreiecke PQT und BAC ähnlich sind (entsprechende Seiten sind zueinander parallel) ist auch PE parallel zu BE und somit auch BE eine Schwerlinie im Dreieck ABC.

Ein gesuchter Punkt P liegt also auf der Schwerlinie BE des Dreiecks ABC. Wir lassen P nun ausgehend von B in Richtung des Punktes E auf dieser Schwerlinie „wandern" und betrachten die Flächeninhalte der Dreiecke PRD und PEQ:

- Der Fächeninhalt des Dreiecks PRD ist beliebig klein, wenn P nur nahe genug beim Eckpunkt B liegt und wächst stetig wenn P zu E wandert.(Die Basis PR und die entsprechende Höhe werden immer größer).

- Der Flächeninhalt des Dreiecks PEQ wird stetig kleiner und ist beliebig klein, wenn P nur nahe genug beim Punkt E liegt.

Daher kann es höchstens einen Punkt P auf der Schwerlinie BE geben, für den gilt: $[PEQ] = [PRD]$. Da aber offensichtlich der Schwerpunkt des Dreiecks ABC diese Eigenschaft hat, ist er die einzige Lösung.

(Karl Czakler) □

Lösung 3. Im Folgenden bezeichne $d(X, YZ)$ jeweils die Höhe (den Normalabstand) vom Punkt X auf die Strecke YZ oder deren Verlängerung. $[XYZ]$ bezeichne die Fläche des Dreiecks XYZ.

Sei P ein Punkt, für den die drei in der Angabe betrachteten Flächeninhalte gleich sind. Wir wollen nun davon ausgehend weitere Eigenschaften von P herleiten.

Zunächst betrachten wir die Dreiecke PTE und PEQ. Gemäß Flächenformel im Dreieck und Angabe gilt $d(P,TE) \cdot \overline{TE} = 2[PTE] = 2[PEQ] = d(P,EQ) \cdot \overline{EQ}$. Kürzen wir $d(P,TE)$ auf beiden Seiten, so erhalten wir also $\overline{TE} = \overline{EQ}$.

Nun ist das Dreieck QPT ähnlich zu ABC, da die Seiten jeweils paarweise zueinander parallel sind, und PE im kleinen Dreieck entspricht BE im Großen (ebenfalls auf Grund der Parallelität, bzw. weil auch QPE ähnlich zu ABE ist). Somit gilt $\overline{CE} : \overline{EA} = \overline{TE} : \overline{EQ} = 1 : 1$, also ist E der Mittelpunkt von AC, und somit BE eine Schwerlinie.

Betrachten wir nun die Dreiecke QPE und PRD, deren Grundlinien auf derselben Geraden liegen. Die Dreiecke QPE und ABE sind zueinander ähnlich, da ihre Seiten jeweils paarweise zueinander parallel sind. Somit verhalten sich auch ihre Höhen gleich zueinander wie ihre Seitenlängen, also $d(E,QP) : d(E,AB) = \overline{QP} : \overline{AB}$. Analog sind PRD und ABD zueinander ähnlich, also gilt $d(D,PR) : d(D,AB) = \overline{PR} : \overline{AB}$.

Sei oBdA $\overline{QP} < \overline{PR}$. Wir wollen zeigen, dass dann auch $[QPE] < [PRD]$ gilt. Zunächst sehen wir:

$$d(E,QP) : d(E,AB) = \overline{QP} : \overline{AB} < \overline{PR} : \overline{AB} = d(D,PR) : d(D,AB)$$

Nun machen wir uns die gemeinsame Parallele QR zu Nutze und zeigen: Wenn der Abstand $d(E,QR)$ einen geringeren Anteil an der Gesamthöhe $d(E,AB)$ im Dreieck EAB ausmacht als der Abstand $d(D,QR)$ an der Gesamthöhe $d(D,AB)$ im Dreieck DAB, dann liegt E auch näher bei der Parallelen als D.

$$\begin{aligned}
& \frac{d(E,QP)}{d(E,AB)} < \frac{d(D,PR)}{d(D,AB)} && \Big|^{-1} \quad \text{(beide Seiten positiv)} \\
\iff & \frac{d(E,AB)}{d(E,QP)} > \frac{d(D,AB)}{d(D,PR)} && \\
\iff & \frac{d(E,QR)+d(P,AB)}{d(E,QP)} > \frac{d(D,QR)+d(P,AB)}{d(D,PR)} && \\
\iff & 1 + \frac{d(P,AB)}{d(E,QP)} > 1 + \frac{d(P,AB)}{d(D,PR)} && \Big| -1 \\
\iff & \frac{d(P,AB)}{d(E,QP)} > \frac{d(P,AB)}{d(D,PR)} && \Big| : d(P,AB) > 0 \\
\iff & \frac{1}{d(E,QP)} > \frac{1}{d(D,PR)} && \Big|^{-1} \quad \text{(beide Seiten positiv)} \\
\iff & d(E,QP) < d(D,PR) &&
\end{aligned}$$

Falls $\overline{QP} < \overline{PR}$ gilt, ist also auch die Höhe in QPE geringer als jene in PRD, also erhalten wir $2[QPE] = d(E,QP) \cdot \overline{QP} < d(D,PR) \cdot \overline{PR} = 2[PRD]$, ein Widerspruch. Analog können wir $\overline{QP} > \overline{PR}$ ausschließen, also gilt $\overline{QP} = \overline{PR}$. Ähnlich wie zuvor ist QRC ähnlich zu ABC und CP entspricht CF, also ist F der Halbierungspunkt von AB, und CF eine Schwerlinie.

P liegt daher auf zwei Schwerlinien und kann somit nur der Schwerpunkt sein. Tatsächlich können wir leicht zeigen, dass der Schwerpunkt alle geforderten Eigenschaften erfüllt und somit die einzige Lösung ist.

(Birgit Vera Schmidt) □

Punktevorschläge:

- Vermutung: Schwerpunkt: **1 Punkt**
- P ist auf Schwerlinie CF: **3 Punkte**
- P ist auf Schwerlinie BE: **3 Punkte**
- Abschluss (d.h. P ist Schwerpunkt als Schnittpunkt zweier Schwerlinien): **1 Punkt**